



# Aide au tolérancement tridimensionnel : modèle des domaines

Mathieu Mansuy

## ► To cite this version:

Mathieu Mansuy. Aide au tolérancement tridimensionnel : modèle des domaines. Autre. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : 2012GRENA016 . tel-00734713v2

**HAL Id: tel-00734713**

**<https://theses.hal.science/tel-00734713v2>**

Submitted on 31 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Génie Mécanique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Mathieu MANSUY**

Thèse dirigée par **Max Giordano**  
et codirigée par **Pascal Hernandez**

préparée au sein du **Laboratoire SYMME : SYstèmes et Matériaux pour la MÉcatronique**  
et de l'**École Doctorale SISEO**

# Aide au tolérancement tridimensionnel: Modèle des domaines

Thèse soutenue publiquement le **25 juin 2012**,  
devant le jury composé de :

**François Villeneuve**

Professeur, Université Joseph Fourier Grenoble, France, Président

**Bernard Anselmetti**

Professeur, ENS de Cachan, France, Rapporteur

**Jean-Yves Dantan**

Professeur, Arts et Métiers ParisTech Metz, France, Rapporteur

**Joseph K. Davidson**

Emeritus Professor, Arizona State University, Arizona, Examineur

**Max Giordano**

Professeur Émerite, Université de Savoie, France, Directeur de thèse

**Pascal Hernandez**

Maître de Conférence, Université de Savoie, France, Co-Directeur de thèse





*à tous mes Enseignants,*





## Remerciements

Ce document concrétise trois années de recherches menées au laboratoire SYMME (**SY**stèmes et **Mat**ériaux pour la **MÉ**catronique) de l'Université de Savoie. Ces travaux ont été dirigé par Max Giordano (professeur émérite de l'Université de Savoie) et co-dirigé par Pascal Hernandez (maître de conférence de l'Université de Savoie). Qu'ils trouvent ici toute ma gratitude et mes sincères remerciements pour m'avoir fait confiance et su m'encadrer tout au long de cette aventure. Max, en particulier pour ta passion que tu gardes intact et que tu sais transmettre et Pascal pour ta tempérance et ta sagesse. Est-il nécessaire de préciser que sans votre expériences et vos conseils ces travaux n'aurait jamais pu aboutir ?

Je suis très reconnaissant envers Messieurs Jean-Yves Dantan (professeur aux Arts et Métiers Paris-Tech de Metz) et Bernard Anselmetti (professeur à l'ENS de Cachan) d'avoir accepté de rapporter mes travaux de thèse. Nos échanges au cours de l'élaboration de ce manuscrit ont été très enrichissant. Petit clin d'œil à Bernard Anselmetti, qui au cours de ma scolarité à l'ENS fut en partie responsable de mon intérêt pour les problématiques de tolérancement et dont la rigueur bien connue n'a pas fait défaut...Merci !

A great thank you to Joseph K. Davidson (emeritus professor of the Arizona State University) for agreeing to be an examiner. But also to have welcome me in Arizona. To be your colleague and your mountain friend was very rewarding professionally and personally.

Je remercie Monsieur François Villeneuve (professeur de l'Université de Grenoble) d'avoir présidé ce jury de thèse.

Un grand merci à tous mes collègues et amis du laboratoire pour leur accueil et les échanges que nous avons pu avoir. Merci à tout ceux qui m'ont soutenu et contribué à l'excellente ambiance au laboratoire et partout ailleurs...!

Enfin, je tiens à remercier toute les personnes extérieures qui furent également fortement sollicitées durant ces trois années. Je pense à ma famille, à mes amis, à Fred et Ruth toujours présent pour me remettre sur le bon chemin (souvent celui de la montagne!?! ) et en particulier à Claire dont le soutien sans limite n'a jamais failli.

Je vous en serai toujours reconnaissant, un grand Merci à tous !



## Table des matières

<b>Aide au tolérancement tridimensionnel : Modèle des domaines</b>	<b>1</b>
<b>1 Le tolérancement : Aspects généraux et bibliographie</b>	<b>3</b>
I Le tolérancement	3
I.1 Pourquoi?	3
I.2 Historique	3
I.3 Représentation de la géométrie et normalisation	4
I.3.a Spécification Géométrique	4
I.3.b Spécification et vérification géométrique	5
II Outils d'assistance au tolérancement	7
II.1 Processus de tolérancement	7
II.2 Modélisation de la géométrie tolérancée	9
II.2.a Tolérancement par classes variationnelles	9
II.2.b Tolérancement vectoriel	11
II.2.c Tolérancement déclaratif	11
II.2.d Tolérancement cinématique	13
II.2.e Par développement limité	14
II.3 Prise en compte de l'assemblage : Équations de tolérancement	16
II.3.a Modélisation de l'assemblage	16
II.3.b Loi de comportement	17
II.3.c Jacobian torseur	20
II.3.d Linéarisation des matrices de passage	21
II.3.e Tolérancement paramétrique	21
II.4 Traitement du système d'inéquations de tolérancement	22
II.4.a Méthode CLIC	22
II.4.b Jacobian torseur	29
II.4.c Hyper-Espaces	30
II.5 Synthèse des méthodes d'assistance au tolérancement présentées	35
III Logiciels d'assistance au tolérancement	36
III.1 Logiciels d'assistance à l'analyse de tolérances	37
III.2 Logiciel d'assistance à la spécification	37
III.3 Logiciels d'assistance à la synthèse de tolérances	38
<b>2 Méthode des domaines</b>	<b>41</b>
Introduction	41
I Torseurs petits déplacements	41

I.1	Champs de déplacements des points appartenant à un solide rigide en mouvement dans un référentiel donné . . . . .	42
I.2	Changement de base d'expression des variations géométriques . . . . .	42
II	Modélisation du tolérancement géométrique par l'outil domaine . . . . .	43
II.1	Géométrie . . . . .	43
II.1.a	Hypothèses . . . . .	43
II.1.b	Paramétrage . . . . .	44
II.1.c	Condition fonctionnelle . . . . .	45
II.2	Domaines Écarts . . . . .	46
II.2.a	Torseur Écart . . . . .	46
II.2.b	Modélisation de l'étendue des variations géométriques autorisées par le tolérancement . . . . .	47
II.2.c	Application à différents types de surfaces et de tolérances . . . . .	49
II.3	Domaines Jeux . . . . .	57
II.3.a	Torseur Jeux . . . . .	57
II.3.b	Modélisation de l'étendue des variations géométriques autorisées par la condition d'impénétrabilité des pièces . . . . .	58
III	Modélisation de l'assemblage et opérations sur les domaines . . . . .	59
III.1	Graphes d'analyse de structure . . . . .	59
III.2	Architecture des mécanismes tridimensionnels . . . . .	60
III.2.a	Assemblage en série : empilage simple . . . . .	60
III.2.b	Liaisons en parallèle . . . . .	64
III.3	Manipulation des domaines . . . . .	65
III.3.a	Définition duale d'un polytope . . . . .	66
III.3.b	Découplage de la forme et la taille des polytopes . . . . .	67
IV	Conclusion . . . . .	67
<b>3</b>	<b>Empilage simple</b> . . . . .	<b>69</b>
I	Mise en situation . . . . .	69
I.1	Assemblage . . . . .	69
I.2	Condition fonctionnelle . . . . .	70
I.3	Défauts et mobilités internes . . . . .	70
I.3.a	Jeux . . . . .	70
I.3.b	Défauts géométriques . . . . .	70
I.3.c	Respect de la condition fonctionnelle . . . . .	71
II	Assemblage en série sans jeu . . . . .	71
II.1	Mise en équations du problème de tolérancement . . . . .	71
II.1.a	Chaîne de cotes . . . . .	71
II.1.b	Conditions fonctionnelles élémentaires . . . . .	72
II.1.c	Domaines écarts . . . . .	74
II.2	Nouvelle méthode de calcul . . . . .	75
II.2.a	Détermination des coefficients d'influence . . . . .	75
II.2.b	Respect de la condition fonctionnelle . . . . .	77
II.2.c	Algorithme . . . . .	81
II.3	Application sur un assemblage axisymétrique . . . . .	82
II.3.a	Modélisation de l'assemblage . . . . .	82
II.3.b	Modélisation de la condition fonctionnelle . . . . .	82
II.3.c	Modélisation des domaines écarts . . . . .	83
II.3.d	Calcul des coefficients d'influence . . . . .	84
III	Assemblage en série avec jeu . . . . .	84
III.1	Jeux défavorables . . . . .	85
III.2	Jeux donnés . . . . .	86
III.3	Jeux favorables . . . . .	86
III.4	Application sur un exemple d'assemblage en série avec jeux . . . . .	89

III.4.a	Modélisation . . . . .	90
III.4.b	Calcul des coefficients d'influence . . . . .	91
IV	Répartition des tolérances . . . . .	93
IV.1	Optimisation sous contraintes . . . . .	93
IV.2	Application à l'exemple d'assemblage en série avec jeux . . . . .	94
IV.2.a	Précision du mécanisme . . . . .	94
IV.2.b	Montabilité . . . . .	94
IV.3	Approche probabiliste . . . . .	95
V	Conclusion . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Liaisons en parallèle</b>	<b>99</b>
I	Mise en situation . . . . .	99
I.1	Assemblage . . . . .	99
I.2	Tolérancement . . . . .	100
I.2.a	Tolérancement qualitatif . . . . .	100
I.2.b	Conditions de fonctionnalité . . . . .	100
I.3	Défauts et mobilités internes . . . . .	101
II	Approche pire des cas . . . . .	101
II.1	Méthode générique des domaines . . . . .	102
II.2	Exemple didactique : liaison plan/plan et cylindre/cylindre . . . . .	103
II.2.a	Modélisation . . . . .	104
II.2.b	Calculs . . . . .	105
III	Approche statistique . . . . .	107
III.1	Méthode d'analyse des tolérances . . . . .	107
III.2	Exemple didactique : liaison plan/plan et cylindre/cylindre . . . . .	109
IV	Algorithme générique d'analyse du tolérancement . . . . .	111
IV.1	Analyse d'assemblages avec liaisons en parallèles . . . . .	112
IV.1.a	Analyse de l'assemblage comme une somme de <i>Minkowski</i> . . . . .	112
IV.1.b	Analyse de l'assemblage comme une intersection de domaines . . . . .	113
IV.2	Analyse de la position et de l'orientation de la surface terminale . . . . .	114
V	Méthode de calcul sur les domaines . . . . .	115
V.1	Addition des domaines . . . . .	115
V.1.a	Liste des hyper-plans frontières . . . . .	115
V.1.b	Nouvelle méthode de représentation . . . . .	118
V.1.c	Sommes de <i>Minkowski</i> . . . . .	120
V.2	Intersections de domaines . . . . .	121
VI	Conclusion . . . . .	123
<b>5</b>	<b>Mécanismes hybrides</b>	<b>125</b>
I	Analyse du tolérancement des mécanismes hybrides . . . . .	125
I.1	Topologie . . . . .	125
I.2	Méthode de résolution . . . . .	126
II	Application de la méthode . . . . .	130
II.1	Assemblage par double piétage . . . . .	130
II.2	Modélisation des données d'entrées . . . . .	131
II.2.a	Topologie . . . . .	131
II.2.b	Défauts et mobilités internes . . . . .	132
II.3	Tirages aléatoires . . . . .	133
II.4	Calculs . . . . .	133
II.4.a	Algorithme général . . . . .	134
II.4.b	Résultats . . . . .	134
II.4.c	Analyse statistique . . . . .	136
III	Conclusion . . . . .	138
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>139</b>

<b>Abstract in English</b>	<b>143</b>
<b>1 Tolerancing : General aspects and bibliography</b>	<b>145</b>
I Objectives . . . . .	145
II Tolerancing . . . . .	145
II.1 Why? . . . . .	145
II.2 Modeling of the geometry and standardization . . . . .	145
III Aided tolerancing tools . . . . .	146
III.1 Tolerancing process . . . . .	146
III.2 Modeling of the tolerated geometry . . . . .	147
III.2.a Tolerancing models . . . . .	147
III.2.b Modeling by limited expansion . . . . .	147
III.3 Taking the assembly into account : Tolerancing equation . . . . .	147
III.3.a Assembly model . . . . .	147
III.3.b Behavior laws . . . . .	148
III.3.c Jacobian torsors . . . . .	148
III.4 Tolerancing inequalities system treatment . . . . .	148
III.4.a CLIC method (Cotation en Localisation avec Influence des Contacts) . . . . .	148
III.4.b Jacobian torsors . . . . .	149
III.4.c Hyper-spaces . . . . .	149
IV Aided tolerancing softwares . . . . .	150
<b>2 Domains method</b>	<b>151</b>
I Objectives . . . . .	151
II Geometric tolerancing model with domain tool . . . . .	151
II.1 Geometry . . . . .	151
II.1.a Hypothesis . . . . .	151
II.1.b Parametrization . . . . .	152
II.1.c Functional requirement . . . . .	153
II.2 Deviations domains . . . . .	153
II.3 Clearances domain . . . . .	154
III Assembly modeling . . . . .	154
III.1 Analysis graphs of the structure . . . . .	154
III.2 Architecture of three-dimension mechanisms . . . . .	155
III.3 Handling of the domains . . . . .	156
III.3.a Double definition of polytopes . . . . .	156
III.3.b Decoupling shape and size of the domains . . . . .	156
<b>3 Stack-up assemblies</b>	<b>157</b>
I Objectives . . . . .	157
II Presentation . . . . .	157
III Serial assembly without clearance . . . . .	157
III.1 Didactic example of stack-up assembly without clearance . . . . .	157
III.2 New Method of Calculation . . . . .	158
III.2.a Evaluation of Influence Coefficients . . . . .	158
III.2.b Compliance with Functional Condition . . . . .	159
III.2.c Algorithm . . . . .	160
IV Simple Stacking with Clearance . . . . .	160
V Tolerance Allocation . . . . .	162
VI Probabilistic approach . . . . .	162

<b>4</b>	<b>Parallel links</b>	<b>163</b>
I	Objectives . . . . .	163
II	Presentation . . . . .	163
II.1	Assembly . . . . .	163
II.2	Functional requirement . . . . .	163
III	Worst case approach . . . . .	164
IV	Statistical approach . . . . .	165
V	Generic algorithm of the analysis tolerancing . . . . .	166
VI	Calculation method on the domains . . . . .	166
VI.1	Domains addition . . . . .	167
VI.1.a	List of the border hyper-planes . . . . .	167
VI.1.b	<i>Minkowski</i> sum . . . . .	167
VI.2	Intersections of domains . . . . .	168
<b>5</b>	<b>Hybrid mechanisms</b>	<b>169</b>
I	Objectives . . . . .	169
II	Tolerancing analysis of the hybrid mechanisms . . . . .	169
II.1	Topology . . . . .	169
II.2	Resolution method . . . . .	170
II.2.a	In worst case . . . . .	170
II.2.b	Statistical study . . . . .	171
II.2.c	Results . . . . .	172
	<b>Conclusions and outlooks</b>	<b>173</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>175</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>177</b>
	<b>Annexes</b>	<b>187</b>
A	Définition de la matrice rotation $R(\vec{e}, \Theta)$	189
B	Champs de déplacements des points appartenant à un solide rigide en mouvement dans un référentiel donné	191





## Table des figures

Gaston™ by Franquin . . . . .	3
1.2 Modèle nominal et « skin » modèle défini par [Ballu 01] . . . . .	6
1.3 Six opérations pour l'identification des éléments géométriques . . . . .	6
1.4 Dualité entre la spécification et la vérification [ISO-TS-17450-1 05] . . . . .	7
1.5 Modèle par classe variationnelle défini par Requicha [Requicha 83] . . . . .	10
1.6 Tolérancement vectoriel selon A. Wirtz . . . . .	11
1.7 Structure cinématique définie par Louis Rivest [Rivest 94b] . . . . .	14
1.8 Position et orientation de la surface de substitution . . . . .	15
1.9 Graphe de liaisons selon Mejbri [Mejbri 05] . . . . .	16
1.10 Analyse d'impact par boucle d'influence GAIA® sur un mécanisme de rotor d'hélicoptère [Ballu 06] . . . . .	17
1.11 Écart de situation d'une surface plane . . . . .	18
1.12 propagation de défauts entre deux composants rigides [Mounaud 09] . . . . .	18
1.13 Fermeture de chaîne torsorielle . . . . .	19
1.14 Processus de la méthode CLIC . . . . .	22
1.15 Exemple de tableau de mise en position [Anselmetti 10a] . . . . .	23
1.16 Exigences géométriques des liaisons [Chavanne 11a] . . . . .	23
1.17 Cotation des surfaces de jonction [Anselmetti 06] . . . . .	24
1.18 Processus de cotation des surfaces de jonction [Anselmetti 06] . . . . .	24
1.19 Boucles d'assemblage en fonction de la configuration de montage [Anselmetti 10b] . . . . .	25
1.20 Algorithme de spécification [Anselmetti 06] . . . . .	25
1.21 Points et directions d'analyse d'une surface terminale . . . . .	26
1.22 Assemblage en série étudié à l'aide de la méthode des droites d'analyse . . . . .	26
1.23 Relation de transfert dans les jonctions avec liaisons en parallèle [Anselmetti 06] . . . . .	27
1.24 Processus de spécification suivant la méthode Quick GPS [Anselmetti 10b] . . . . .	28
1.25 Résultats de la spécification Quick GPS [Anselmetti 10b] . . . . .	29
1.26 Conversion du modèle CAO en modèle variationnel . . . . .	30
1.27 Espace de faisabilité . . . . .	30
1.28 Tolérancement d'un axe par une zone de tolérance cylindrique [Singh 09] . . . . .	32
1.29 Configurations limites et modèle <i>T-Maps</i> ® du tolérancement d'un axe dans la condition dimensionnelle au maximum de matière (avec t=valeur de la tolérance de localisation) . . . . .	32
1.30 Projection du modèle <i>T-maps</i> ® avec modificateur au maximum de matière . . . . .	33
1.31 Assemblage auto-centreur [Singh 09] . . . . .	34
1.32 Schématisation géométrique de l'assemblage auto-centreur . . . . .	34
1.33 Obtention du <i>T-maps</i> ® modélisant les mouvements relatifs entre les pièces 1 et 2 . . . . .	35
1.34 Synoptique de fonctionnement <i>AnaTol</i> ® [Mounaud 09] . . . . .	38

1.35 Entrées/Sorties <i>AnaTol</i> <sup>®</sup> et <i>MECAMaster</i> <sup>®</sup> [Chavanne 11a]	39
Atomium de Gaston <sup>™</sup> by Franquin	41
2.2 Déplacement d'un point M quelconque appartenant à un solide S indéformable	42
2.3 Surface nominale et de substitution et repères associés	44
2.4 Surface plane spécifiée en orientation	47
2.5 Limitation du déplacement des points frontières à l'intérieur de la zone de tolérance	48
2.6 Représentation graphique dans le plan $(r_x, r_y)$ du domaine écarts relatif à la spécification en orientation d'une surface plane rectangulaire (a*b) défini au point $O_N$ centre de la surface.	49
2.7 Tolérancement d'une surface plane par deux spécifications	49
2.8 Domaine écart écrit au point $O_N$ relatif à la spécification de localisation	50
2.9 Domaine écart écrit au point $O_N$ relatif à la spécification de localisation et d'orientation	51
2.10 Transformation de la section du domaine écart lors du passage du repère local $R_N$ au repère de référence $R_R$	53
2.11 Localisation de l'axe d'un cylindre	53
2.12 Section dans l'espace $(\vec{t}_x, \vec{t}_y, \vec{r}_y)$ du domaine écart associé à la tolérance de localisation de l'axe du cylindre	54
2.13 Linéarisation de la zone de tolérance	55
2.14 Section du domaine écart linéarisé associé à la tolérance de localisation de l'axe du cylindre dans l'espace $(\vec{r}_y, \vec{t}_x, \vec{t}_y)$	55
2.15 Détermination des points caractéristiques du contour de la surface tolérancée	56
2.16 Liaison Cylindre-Cylindre	57
2.17 Section dans l'espace $(t_x, t_y, t_z)$ du domaine jeux linéarisé associé à la liaison cylindre-cylindre	58
2.18 Modélisation des variations géométriques et mobilités d'une liaison	59
2.19 Exemple de graphe d'analyse selon Giordano [Giordano 05]	60
2.20 Exemple d'assemblage en série	60
2.21 Domaines convexes définis dans l'espace Euclidien $(\vec{x}, \vec{y})$	61
2.22 Illustration de la somme de <i>Minkowski</i> $[D_u] \oplus [D_v]$	61
2.23 Opération Sweeping & Intersection " $\ominus$ "	62
2.24 Graphe générique d'assemblage en parallèle	64
2.25 H-représentation	66
2.26 V-représentation	66
2.27 Décomposition en topologies élémentaires des assemblages tridimensionnels	68
Empilage de Gaston <sup>™</sup> by Franquin	69
3.2 Topologie générique de graphe d'assemblage en série	69
3.3 Exemple didactique d'empilage simple sans jeu	72
3.4 Petits déplacements de la surface 32 dans sa zone de tolérance associée	73
3.5 Représentation graphique du domaine condition fonctionnelle appliquée sur la surface plane rectangulaire (a*b) 32	74
3.6 Somme de <i>Minkowski</i> de deux domaines : $[D_1] \oplus [D_2]$	75
3.7 Illustration de la recherche du sommet $V_{ps, kmax}$ défavorable	76
3.8 Exemple didactique de tolérancement illustrant la linéarité par morceaux	78
3.9 $[C_f]_O$	78
3.10 $[E_1]_O$	79
3.11 $[E_2]_O$	79
3.12 Illustration du calcul des coefficients d'influence	80
3.13 Domaine de respect de l'exigence fonctionnelle de tolérance $t_{cf}$	80
3.14 Illustration du calcul de l'influence des défauts, sur le respect d'une exigence fonctionnelle $H_i$	81
3.15 Exemple d'assemblage axisymétrique en série sans jeu	82
3.16 $[C_f]_{O_{ps}}$	83
3.17 $(\vec{E} + \vec{J}) \in [C_f]$	85

3.18	$(\vec{E} + \vec{J}) \in [C_f]$	86
3.19	Illustration du principe de superposition	87
3.20	Exemple d'assemblage en série avec jeux	89
3.21	Graphe d'assemblage de l'assemblage en série avec jeux	90
3.22	$[C_f]_{O_{32}}$	90
3.23	Nuage de points des écarts résultants générés par tirage de Monte-Carlo	97
	Idée de Gaston™ by Franquin	99
4.2	Topologie générique d'un graphe d'assemblage avec liaisons en parallèle	100
4.3	Tolérancement d'un assemblage plan/plan et cylindre/cylindre	103
4.4	Graphe d'assemblage de la liaison plan/plan et cylindre/cylindre	104
4.5	Illustration de l'obtention du domaine jeu résiduel	105
4.6	Condition d'assemblage	106
4.7	Répartition de la variable aléatoire $J_r$ avec $t_0 = t_1 = 50\mu m$ et $t_{p0} = t_{p1} = 50\mu m$	109
4.8	Algorithme générique d'analyse de tolérancement	111
4.9	Calcul du petit déplacement induit par les jeux du chemin d'assemblage 1 au point $P$ [Singh 09]	112
4.10	Obtention du $T\text{-maps}^{\text{®}}$ modélisant les mouvements relatifs entre les pièces 1 et 2	112
4.11	Intersection des domaines jeux $[J_i]$ générés par les liaisons pion-rainure $i$	113
4.12	Somme de <i>Minkowski</i> de deux domaines : $[D] = [D_1] \oplus [D_2]$	115
4.13	Exemple de somme de <i>Minkowski</i> de deux polytopes convexes	116
4.14	Deux polytopes convexes définissant une liste de 8 hyper-plans frontières de vecteurs normaux $n_{H_i}$	118
4.15	Nouvelle représentation des polytopes $[P_1]$ et $[P_2]$ associée à la liste $B$ définie précédemment	119
4.16	Illustration du coefficient d'influence $c_i$ de la somme des polytopes $[P_1]$ et $[P_2]$ sur une condition $H_i$	120
4.17	Illustration de la nouvelle représentation de la somme de deux polytopes convexes $[P_1]$ et $[P_2]$	120
4.18	Exemple d'intersection de deux polytopes convexes $[P_1]$ et $[P_2]$ définis par leur nouvelle représentation	122
	Gaffophone de Gaston™ by Franquin	125
5.2	Exemple de graphe d'assemblage de mécanisme hybride	125
5.3	Exemple de graphe d'assemblage élémentaire	126
5.4	Réduction des assemblages de type empilage simple composant l'exemple de topologie hybride	126
5.5	Réduction des maillons d'assemblages en parallèle composant l'exemple de topologie hybride	127
5.6	Réduction du chemin d'assemblage en série reliant les pièces 1, 3 et 4 de l'assemblage hybride	128
5.7	Réduction du maillon d'assemblage en parallèle de l'assemblage hybride	128
5.8	Réduction finale de l'assemblage hybride	128
5.9	Algorithme de réduction du graphe d'assemblage des mécanismes hybrides	129
5.10	Assemblage par double piétage	130
5.11	Tolérancement des pièces de l'assemblage par double piétage	130
5.12	Graphe d'assemblage de l'assemblage par double piétage	131
5.13	Nouvelle représentation dans le plan $(\vec{t}_x, \vec{r}_y)$ du domaine jeux $[J_{11}]$	132
5.14	Génération des variables aléatoires	133
5.15	Nouvelle représentation du domaine intersection du maillon d'assemblage en parallèle	134
5.16	Domaine intersection d'un tirage et ensemble des points sur les bords du maillon d'assemblage en parallèle	135
5.17	Condition de respect de la condition fonctionnelle $C_f$	136
5.18	Défauts d'alignement radial des axes associés aux surfaces fonctionnelles	137
5.19	Architecture de type "pont de Wheastone"	138
	Gaston™ by Franquin	139
1.1	CLIC method process	148

2.1	Nominal and substitute surfaces with their associated coordinate system . . . . .	152
2.2	Example of analysis graph by Giordano [Giordano 05] . . . . .	155
2.3	Breaking down of the three-dimensional assembly in elementary topologies . . . . .	155
3.1	Didactic example of simple stack-up without clearance . . . . .	157
3.2	Illustration of Locating an Unfavorable Vertex $V_{ps,kmax}$ . . . . .	159
3.3	$(\vec{E} + \vec{J}) \in [C_f]$ . . . . .	161
3.4	Points cloud of geometric deviation randomly generated . . . . .	162
4.1	Generic algorithm of the tolerancing analysis . . . . .	166
4.2	Illustration of the sensitive coefficient $c_i$ of the sum of polytopes $[P_1]$ and $[P_2]$ on the condition $H_i$ . . . . .	167
4.3	Example of intersection of two convex polytopes $[P_1]$ and $[P_2]$ defined by their new representation . . . . .	168
5.1	Example of assembly graph of a hybrid mechanism . . . . .	169
5.2	Reduction algorithm for assembly graph of hybrid mechanisms . . . . .	170
5.3	Conditions to respect the functional requirement $C_f$ . . . . .	172
5.4	"Wheastone bridge" architecture . . . . .	172
A.1	Rotation autour d'un vecteur $\vec{e}$ quelconque . . . . .	189
B.1	Déplacement d'un point M quelconque appartenant à un solide S indéformable . . . . .	191

## Liste des tableaux

1.1	Les 7 classes de surfaces . . . . .	12
1.2	Synthèse des méthodes d'assistance au tolérancement . . . . .	35
3.1	Coefficients d'influence des domaines écarts $[E_1]$ et $[E_2]$ sur la condition fonctionnelle $[C_f]$ . . . . .	80
3.2	Coefficients d'influence des domaines écarts $[E_{ps}]_{O_{32}}$ sur le domaine jeux $[J]_{O_{32}}$ . . . . .	93
4.1	Synthèse de l'étude de montabilité et de défaut de mise en position par l'outil domaine . . . . .	107
4.2	Résultats de l'analyse statistique . . . . .	110
4.3	Obtention des hyper-plans frontières du polytope somme de <i>Minkowski</i> de deux polytopes convexes . . . . .	116
5.1	Tableau décrivant la structure de l'assemblage par double piétage . . . . .	131
5.2	Tableau recensant l'ensemble des informations de la surface tolérancée 11 pour la construction du domaine écarts $E_{11}$ . . . . .	132
5.3	Tableau recensant l'ensemble des informations de la liaison 11 pour la construction du domaine jeux $J_{11}$ . . . . .	132
5.4	Nombre de mécanismes rebutés en fonction de la valeur de la tolérance fonctionnelle $t_{cf}$ . . . . .	137

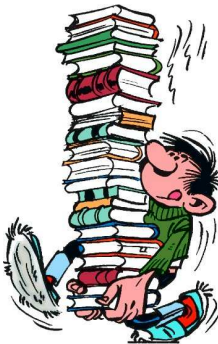


# Aide au tolérancement tridimensionnel : Modèle des domaines





## Le tolérancement : Aspects généraux et bibliographie



– Gaston™ by Franquin

### Objectifs

*L'objectif de ce premier chapitre est de présenter au lecteur une vue d'ensemble des travaux significatifs d'analyse et de synthèse de tolérancement. Nous commencerons par rappeler l'intérêt et les concepts généraux du tolérancement normalisé. Puis, sans être exhaustifs, nous proposons de décrire en deux temps les principaux modèles de tolérancement et les avancées qui ont été proposés au cours de ces dernières années. Dans une première partie nous évoquerons les méthodes de description mathématique de la géométrie avec défauts. Puis nous présenterons les techniques de résolution, associées ou non, aux précédentes représentations. Enfin nous finirons par exposer les principaux logiciels d'assistance au tolérancement.*

## I Le tolérancement

### I.1 Pourquoi ?

Le dessin industriel est un moyen de communication indispensable entre les multiples corps de métier qui interviennent tout au long du cycle de vie d'un produit manufacturé. En particulier, le tolérancement en est une partie essentielle. Il intervient de la phase de conception à la fabrication en passant par toutes les étapes de contrôles intermédiaires et finales.

Les pièces qui constituent les assemblages mécaniques sont fabriquées par l'homme et ne sont donc pas, par définition, de géométrie parfaite. Le tolérancement devra définir le type et les limites des défauts acceptables de façon univoque et compréhensible par tous les acteurs du cycle d'élaboration du produit. Il est un outil fondamental pour maîtriser la qualité géométrique des produits. Il constitue le fondement du contrat écrit entre les différents intervenants.

### I.2 Historique

Les innovations du concept de standardisation et d'interchangeabilité des pièces sont à l'origine de nombreux faits historiques connus. C'est l'ingénieur *Jean-Baptiste Vaquette de Gribeauval* qui, le premier, mit en application ce concept. Au cours du XVIII<sup>ème</sup> siècle, il se lance dans de grands travaux de

normalisation de l'artillerie et des canons, ce qui explique en partie les succès des armées révolutionnaires et napoléoniennes.

Cette nouvelle façon de travailler s'est peu à peu élargie au reste du monde. En 1865, la victoire des Nordistes pendant la guerre de sécession, alors que les Sudistes avaient de nombreux atouts pour l'emporter, est en grande partie attribuée à la mise en place d'un système de fabrication standardisé [de Jaegher 11].

Ce nouveau concept de fabrication provoque de grands bouleversements et marque le début de l'ère industrielle moderne.

Mais il faut attendre le début du  $XX^{eme}$  siècle pour voir apparaître les premiers travaux d'amélioration du rendement dans la production de pièces mécaniques en série. C'est en 1903 que Taylor décrit le principe de standardisation et d'interchangeabilité des pièces qui facilite et accélère la production ainsi que la maintenance. Taylor pose ici les premières pierres du principe central de "l'American System of Manufacturing". Cette nouvelle culture technologique est très rapidement reprise par la production de masse dans l'industrie automobile. Et en particulier par H. Ford dont le modèle T sort des chaînes de production dès 1908.

C'est dans cet environnement que la cotation fait ses premiers pas. On n'utilise alors que des tolérances dimensionnelles qui suffisent à répondre aux techniques et méthodes industrielles de l'époque. La proximité géographique des bureaux d'études et des ateliers de production facilite la communication et permet de développer un savoir faire indispensable à l'évolution de ce nouveau langage.

C'est au cours de la seconde guerre mondiale que le tolérancement trouve un nouvel essor avec la demande en volume de production plus importante et le perfectionnement des moyens de production. Le triptyque "Qualité, Coût, Délai" devient plus exigeant, et pour rester compétitif il devient nécessaire de prendre en compte de nouveaux défauts (de forme, d'orientation, ...). Le langage s'enrichit donc pour définir de nouvelles tolérances géométriques de forme, de position et d'orientation. En parallèle, la mondialisation rend la communication moins aisée entre concepteurs et producteurs et ne tolère plus d'ambiguïtés dans la définition des besoins fonctionnels.

Ce langage ne cessera donc d'évoluer au cours du temps pour s'adapter aux besoins de plus en plus exigeants des industriels. Ces avancées réalisées par la résolution au cas par cas de problèmes de plus en plus complexes se présentent aujourd'hui sous forme de normes : (ISO, ASME, ...) elles aussi en perpétuelle évolution.

### I.3 Représentation de la géométrie et normalisation

Le but recherché par la normalisation du langage de tolérancement est de fournir un moyen de communication univoque connu et reconnu par tous. Ce besoin est essentiel pour répondre aux méthodes de production actuelles. Ce langage suit l'évolution des procédés de fabrication de plus en plus perfectionnés et des besoins de plus en plus exigeants. C'est pourquoi des mises à jour ou de nouvelles normes sont régulièrement ajoutées.

#### I.3.a Spécification Géométrique

Les évolutions temporelles majeures de la cotation font apparaître 3 concepts principaux de tolérancement. Dans l'ordre chronologique :

- **Le tolérancement dimensionnel** : Notion de dimension locale et exigence d'enveloppe
  - ▷ ISO 8015 : Dessin technique - Principe du tolérancement de base [ISO-8015 85].
- **Les zones de tolérances** : Tous les points de l'élément tolérancé doivent être inclus dans un espace appelé zone de tolérance et mis en position par rapport à une ou un ensemble de surfaces dites de référence.
  - ▷ NF EN ISO 5459 : 2004 Spécification Géométrique des Produits (GPS) - Tolérancement géométrique - Références spécifiées et systèmes de références spécifiés [NF-EN-ISO-5459 04]
  - ▷ NF EN ISO 1101 : 2006 Spécification Géométrique des Produits (GPS) - Tolérancement

- géométrie - Tolérancement de forme, orientation, position et battement [NF-EN-ISO-1101 06]
- **Les états virtuels** : La ou les surfaces tolérancées doivent respecter un contrôle de type "entre - n'entre pas" avec un gabarit virtuel.
  - ▷ NF EN ISO 2692 : 2007 Spécification Géométrique des Produits (GPS) - Tolérancement géométrique - Exigence au maximum de matière (MMR), exigence au minimum de matière (LMR) et exigence de réciprocité [NF-EN-ISO-2692 07]

Outre Atlantique l'ensemble des normes ASME relatives au tolérancement sont consultables dans le fascicule Y14.5-2009 [ASME-Y14.5 09].

Malgré l'importance des travaux de qualité qui ont été faits sur ces Normes, il subsiste encore des manquements : dans certains cas les concepteurs doivent encore avoir recours à des annotations pour préciser leurs besoins fonctionnels exacts, et des ambiguïtés : certaines spécifications peuvent être interprétées de différentes manières.

Ces normes font sans cesse l'objet de modifications ou de propositions de modifications [Ballu 93] [Socoliuc 10] afin de résoudre ce genre de problème. De la même manière Robin Chavanne propose des normes afin de résoudre les problèmes de tolérancement de surfaces de formes complexes [Chavanne 11a]. Eric Pairel propose un langage de tolérancement formel, basé sur des axiomes et non plus à partir d'exemples significatifs. Son modèle se tourne vers le fonctionnel en contrôlant des surfaces dites de substitution construites à partir des surfaces réelles à l'aide d'un critère d'association défini (par exemple au moindre carré) : le tolérancement en zones liées [Pairel 07]. Ce type de tolérancement permet le tolérancement univoque de tous types d'assemblages tridimensionnels. Le tolérancement des surfaces fonctionnelles définit un gabarit virtuel de la pièce au maximum et au minimum de matière. Le volume entre ces deux gabarits représente les zones de tolérances de l'ensemble des surfaces tolérancées. La pièce est considérée comme bonne s'il existe une position de celle-ci telle que toutes ses surfaces sont incluses entre ces deux gabarits. L'idée d'un tel concept de tolérancement avait déjà été proposée [Requicha 83]. Mais son innovation par rapport aux techniques de conception, de production et de métrologie classique ne lui a pas permis de s'imposer jusqu'à présent. Avec les travaux de Leonard [Leonard 12] et au vu de l'évolution des méthodes et de la numérisation de l'ensemble de la chaîne de production il pourrait s'imposer naturellement dans les années à venir et faciliter l'intégration de modules d'assistance au tolérancement au sein de logiciels de C.A.O. [ISO-DIS-14405-2 11].

Dans le domaine de la spécification de l'état de surface, Serge Samper propose une méthode de tolérancement et de contrôle basée sur l'analyse modale des surfaces [Adragna 10]. Actuellement les définitions de défauts de forme, d'ondulation et de rugosité sont discutables. C'est pourquoi Serge Samper décrit la forme de la surface comme une composition pondérée de ses différents modes propres de vibrations. Il devient alors possible de choisir avec précision la bande passante des fréquences des défauts à contrôler. D'importants travaux de normalisation sont en cours.

### I.3.b Spécification et vérification géométrique

Avec le développement du langage normalisé de tolérancement et le perfectionnement des machines de mesure par points, de nouvelles problématiques sont apparues lors du contrôle. Dans certains cas, le tolérancement géométrique normalisé d'une pièce ne fournit pas la totalité des informations nécessaires à sa vérification. C'est pourquoi, les travaux de Ballu et Mathieu ont introduit un langage univoque de description de la géométrie avec défauts [Mathieu 03]. Ce langage, appelé *GeoSpelling*, normalisé en 2005 [ISO-TS-17450-1 05], fait référence dans les concepts généraux de spécification géométrique des produits. Il permet de définir un vocabulaire et d'identifier de manière systématique les différentes entités géo-

métriques avec défauts [Mathieu 07a]. Ce langage repose sur deux idées maitresses [Ballu 01] [Dantan 08] :

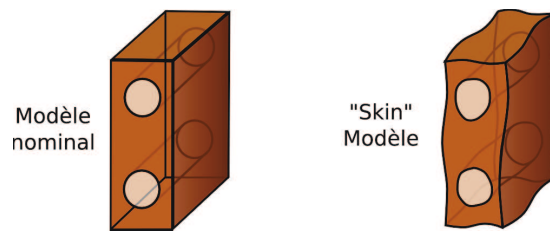


Fig. 1.2 – Modèle nominal et « skin » modèle défini par [Ballu 01]

- Le "skin" model (fig. 1.2) qui représente la peau de la pièce avec défauts. A la différence du modèle nominal à géométrie parfaite défini en bureau d'étude, le "skin" model comporte des défauts géométriques. En faisant varier virtuellement ces défauts géométriques, le concepteur peut identifier leur influence sur le respect du besoin fonctionnel et optimiser leur amplitude maximale (les tolérances).
- L'établissement d'un processus de déclaration des entités géométriques afin de décrire la dimension à spécifier ou à contrôler. Il en résulte la définition d'une spécification géométrique : une spécification géométrique est une condition sur une dimension définie par une caractéristique. Cette caractéristique s'exprime sur un élément géométrique ou entre des éléments géométriques extraits du skin model. *GeoSpelling* recense 6 opérations [Mathieu 07b] permettant d'identifier les éléments géométriques (fig. 1.3) [Favrelière 09] :
  - ▷ L'opération de **partition** utilisée pour identifier des éléments géométriques non idéaux<sup>1</sup> et idéaux<sup>2</sup>.
  - ▷ L'opération d'**extraction** permet d'identifier des points spécifiques à partir d'un élément géométrique, idéal ou non.
  - ▷ Le **Filtrage** réduit le niveau d'information nécessaire à la définition d'un élément non idéal.
  - ▷ Des éléments idéaux sont substitués aux éléments non idéaux selon différents critères d'**Association**.
  - ▷ L'opération de **Collection** identifie les groupes fonctionnels d'éléments idéaux ou non.
  - ▷ L'opération de **Construction** définit un ou plusieurs éléments idéaux par assemblage d'autres éléments idéaux selon un ensemble de contraintes.

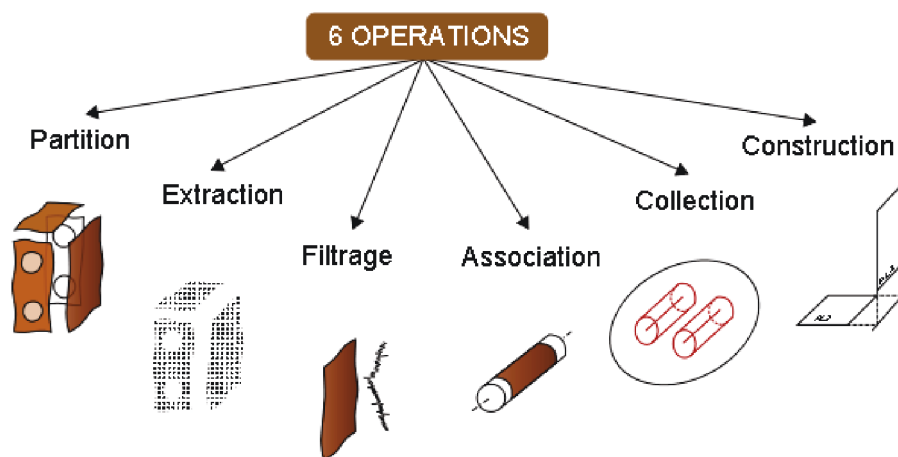


Fig. 1.3 – Six opérations pour l'identification des éléments géométriques

1. un élément non idéal est un élément géométrique dont la définition dépend entièrement d'une pièce réalisée ou imaginée.  
 2. un élément idéal fait référence à un élément géométrique entièrement défini à un nombre fini près de caractéristiques.

Ainsi, grâce à cette définition, chaque spécification peut être définie de manière univoque et systématique. *GeoSpelling* est un concept général de description de la géométrie des produits qui offre également un moyen de communication entre concepteurs et métrologues pour spécifier et vérifier la qualité géométrique des produits (fig. 1.4).

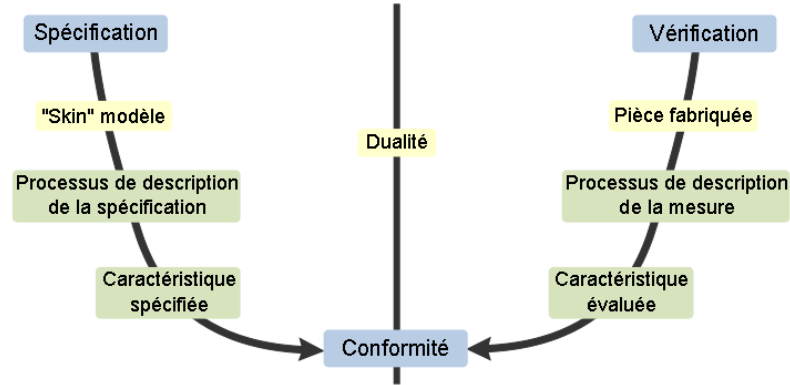


Fig. 1.4 – Dualité entre la spécification et la vérification [ISO-TS-17450-1 05]

Cependant, si ce modèle permet une plus grande rigueur dans la construction et la définition de normes de tolérancement, il ne définit pas en lui-même un système précis et cohérent de tolérancement. En particulier, il ne permet pas de formaliser la description des conditions fonctionnelles ni de les transférer en spécifications sur chaque pièce que ce soit du point de vue qualitatif (type des spécifications) que du point de vue quantitatif (valeurs des cotes cibles et des tolérances).

Afin de notifier dans quelles configurations de jeux le tolérancement du produit doit être respecté, Jean-Yves Dantan étoffe ce modèle à l'aide de la notion de quantificateurs [Dantan 05]. Il définit deux types de quantificateurs, le quantificateur universel " $\forall$ " et le quantificateur existentiel " $\exists$ ". Il identifie ainsi si la spécification géométrique doit être respectée dans toutes les configurations de jeux " $\forall$ " ou seulement pour au moins une seule " $\exists$ ". Sans être formalisée à l'aide de quantificateur, une notion équivalente est couramment utilisée dans d'autres travaux [Chavanne 11a] sous le terme de "jeu favorable" lorsque la condition fonctionnelle doit être respectée pour au moins une configuration de jeu (" $\exists$ ") ou "jeu défavorable" lorsque la condition fonctionnelle doit être respectée pour toutes (" $\forall$ ") configurations de jeu. Par la suite nous utiliserons ces deux désignations [Mansuy 11].

Si le tolérancement tel qu'il est normalisé aujourd'hui comporte encore quelques lacunes c'est un outil de communication relativement puissant pour les différents corps de métier présents autour d'un produit manufacturé. Cependant, sa principale source de défauts semble résider dans l'homme qui l'utilise. En effet, de larges progrès sont fréquemment possibles par un simple complément de formation ou de temps consacré au tolérancement d'une pièce mécanique.

De nombreuses actions de formation à la lecture et à l'écriture du tolérancement normalisé sont régulièrement menées [Dufailly 07]. En parallèle, des outils informatiques proposent d'assister le concepteur dans le choix des spécifications géométriques d'un produit en fonction de ses conditions fonctionnelles.

## II Outils d'assistance au tolérancement

### II.1 Processus de tolérancement

L'activité de tolérancement a pour ambition de maîtriser les variations géométriques des produits tout au long de la chaîne numérique (conception, fabrication, contrôle et assemblage) afin d'assurer leur bon fonctionnement au cours de leur cycle de vie. Pour ce faire, chaque surface fonctionnelle est spécifiée avec

des intervalles de tolérances fixés. Plus les tolérances sont restrictives, plus le coût de fabrication est élevé mais des tolérances trop larges compromettent la qualité du produit (bon fonctionnement, fiabilité,...). Il s'agit donc de spécifier au plus juste (avec des intervalles de tolérance les plus grands possibles compatibles avec la qualité souhaitée) et de choisir une géométrie optimale (minimiser l'influence des défauts) pour optimiser les coûts.

De par sa portée économique, il est primordial que cette optimisation intervienne dès le début de la chaîne numérique. Il est couramment admis que 75% des coûts de fabrication sont fixés dès les premières étapes de la phase de conception [Dantan 08].

A l'issue de l'analyse fonctionnelle, toutes les exigences fonctionnelles du produit sont formulées de manière littérale en essayant de quantifier au plus juste le besoin à respecter. La première étape consiste à traduire ces besoins en conditions géométriques sur les différentes surfaces dites fonctionnelles du mécanisme. Ces conditions seront appelées par la suite "conditions fonctionnelles". On les retrouve également sous le terme "de conditions d'aptitude à l'emploi" dans la littérature.

Serge Samper, décompose ces conditions fonctionnelles en deux types. Il commence par vérifier que le système est montable (condition qu'il appelle "existence du problème"), avant de contrôler le respect de la fonctionnalité du produit selon son cahier des charges (condition de précision) [Samper 07]. En effet, la problématique de précision n'existe que si l'assemblage mécanique est montable.

Par la suite, le tolérancement fonctionnel sera étudié à travers ces deux types de conditions fonctionnelles : précision et montabilité.

D'après Salomons, le tolérancement fonctionnel repose sur trois problématiques majeures [Salomons 96b, Salomons 96a] :

- **La spécification** : représentation graphique des exigences géométriques (utilisation d'un langage complet et sans ambiguïté entre les différents corps de métier).
- **La synthèse de tolérances** : processus de détermination des tolérances qualitatives et quantitatives optimales pour respecter l'ensemble des exigences fonctionnelles.
- **L'analyse de tolérances** : processus de quantification de l'influence du système de tolérancement défini sur le respect des exigences fonctionnelles.

La normalisation du langage de tolérancement apporte des éléments de réponse de plus en plus aboutis à la première problématique. Laurent Pino [Pino 00] formule d'une autre manière les deux problématiques suivantes :

- *"Quel est le tolérancement qui permet de réaliser une fonction d'assemblage donnée ?"* : la synthèse de tolérances consiste à générer les spécifications géométriques à mettre en place afin de respecter les conditions fonctionnelles préalablement identifiées [Dantan 00]. La définition des spécifications se fait tant d'un point de vue "qualitatif" (type de spécification à mettre en place) que d'un point de vue "quantitatif" (étendue des zones de tolérance). Cette étude peut être menée au pire des cas afin d'assurer la fonctionnalité de l'ensemble des produits fabriqués ou en statistique en pilotant un risque de non-conformité.
- *"Est-ce qu'un tolérancement donné permet de respecter une fonction d'assemblage ?"* : l'analyse de tolérances consiste en effet à simuler l'influence du tolérancement mis en place, afin de vérifier qu'il permet le respect des conditions fonctionnelles identifiées auparavant. Cette étude peut être menée au pire des cas (100% des mécanismes doivent respecter l'ensemble des conditions fonctionnelles) ou en statistique (recherche du risque de non conformité des assemblages engendrés par le tolérancement).

La résolution de la première question est complexifiée par le fait que le langage de tolérancement normalisé ne soit pas totalement déterministe. En effet, une même condition fonctionnelle peut être exprimée de différentes manières. Dans ces conditions, l'automatisation de la génération des tolérances n'est pas possible sans définir des axiomes non reconnus par la norme. C'est pourquoi, la plupart des travaux de recherche actuels répondent plutôt à la seconde question.

Cependant, Robinson [Robinson 97] est un des premiers à proposer des solutions de synthèse de tolérance d'assemblages mécaniques en utilisant le concept de gabarit au maximum de matière. Armillotta quant à lui propose une méthode de génération automatique de tolérances pour respecter des conditions fonctionnelles de type montabilité [Armillotta 07]. Il identifie les surfaces de liaison et fonctionnelles dont

il définit la prépondérance à l'aide d'un critère géométrique défini (aire, ...). Cette hiérarchisation lui permet d'obtenir la cotation qualitative de l'assemblage. Malheureusement, cette méthode ne s'applique pas à d'autres exigences que celle de montabilité (fonctionnalité, précision, ...).

La méthode CLIC de Bernard Anselmetti permet également, à partir de règles métiers, de générer automatiquement des spécifications géométriques respectant une condition fonctionnelle déterminée [Anselmetti 05].

En ce qui concerne la seconde question, de nombreuses modélisations du tolérancement ont été proposées afin de vérifier la conformité du tolérancement vis-à-vis des exigences fonctionnelles du mécanisme. Une sélection des principaux modèles purement géométriques est présentée ci-dessous. Ceux-ci s'appuient sur l'hypothèse de solides rigides ou indéformables. D'autres analyses peuvent également prendre en compte les déformations du produit sous contraintes [Petit 04], notamment pour des grandes structures souples en aéronautique [Mounaud 09]. D'autres encore proposent des simulations complètes à l'aide de modèles multi-physiques [Brissaud 11].

On peut distinguer trois étapes pour résoudre les problèmes de tolérancement de systèmes mécaniques. La première consiste à modéliser sous forme d'objets mathématiques les tolérances et la géométrie des pièces avec ou sans défauts. Nous obtenons ainsi des modèles d'écarts, de jeux et d'exigences géométriques. La seconde consiste à prendre en compte l'assemblage afin d'écrire les relations reliant les variables de jeux, d'écarts et d'exigences géométriques. Ces relations seront appelées : "équations de tolérancement". Enfin, la dernière consiste à traduire la condition de respect des exigences fonctionnelles sous forme de système d'équations et d'inéquations à l'aide des précédentes relations. La résolution de ces systèmes se déroule suivant deux opérations possibles : soit en cherchant le pire des cas, soit suivant une approche statistique. La méthode au pire des cas prend en compte les inégalités portant sur les écarts de géométrie bornés par les tolérances. En statistique, on supposera connues les densités de probabilités et dépendances relatives aux variables aléatoires d'écarts géométriques pour en déduire les données statistiques relatives aux variables qui décrivent les conditions fonctionnelles.

## II.2 Modélisation de la géométrie tolérancée

### II.2.a Tolérancement par classes variationnelles

Au début des années 80, avec l'avènement de l'informatique et l'utilisation croissante de modelleurs CAO. Requicha est le premier à souligner l'absence de module de tolérancement intégré aux systèmes informatiques. Il insiste sur la nécessité de définir mathématiquement la sémantique du tolérancement et de l'intégrer aux logiciels.

Il propose donc un premier modèle [Requicha 77] basé sur l'architecture du modelleur CSG (Constructive Solid Geometry). Dans ce modèle, les surfaces des pièces sont représentées par des demi-espaces séparant la matière du vide. Il utilise les paramètres qui pilotent la dimension et la position de chaque demi-espace comme un paramètre de tolérancement associé à la surface. Mais ce modèle ne permet pas de représenter les zones de tolérance de manière satisfaisante.

Il définit donc un second modèle [Requicha 83] dans lequel une pièce est représentée par une famille de solides fonctionnels. Ces solides sont construits par décalage des surfaces nominales de la pièce étudiée. Le décalage extérieur des toutes les surfaces tolérancées (positive offset) représente la pièce au maximum de matière (Maximal Material Condition) et un décalage intérieur (negative offset) la pièce au minimum de matière (Least Material Condition). La pièce sera considérée comme bonne si elle est confinée dans la zone de tolérance obtenue par soustraction des deux précédents volumes (fig. 1.5).



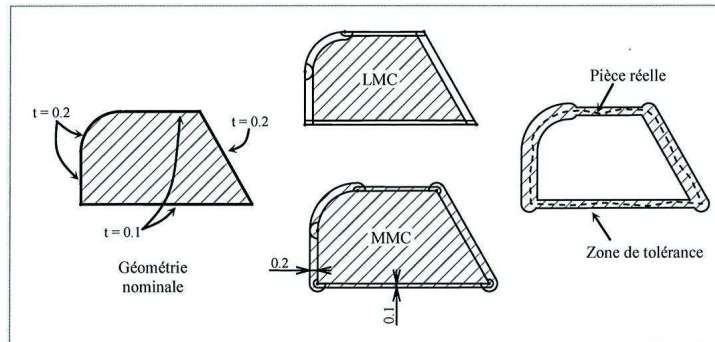


Fig. 1.5 – Modèle par classe variationnelle défini par Requiha [Requiha 83]

Plusieurs lacunes compromettent l'utilisation de ce modèle tel qu'il est défini pour faire de la synthèse de tolérance. Tout d'abord, Requiha a cherché à apporter une alternative aux langages normalisés de l'époque. Les possibilités de traduction de tolérances normalisées s'en retrouvent donc limitées. Par exemple, ce modèle travaille à partir des surfaces réelles ou extraites de la mesure, il n'existe donc pas de zone de tolérance sur des éléments construits tel que les axes, les centres, ... . D'autre part, Les défauts de forme, d'orientation et de position se retrouvent inclus dans une seule est même zone de tolérance sans distinction possible.

Le modèle de tolérancement en zones liées développé par Eric Pairel se base sur ce même concept. À ceci près qu'il étudie la position et l'orientation de surfaces de substitution construites à partir des surfaces réelles avec un critère défini (par exemple au moindre carré). Cette différence fondamentale lui permet d'offrir plus de possibilités de traduction de tolérances [Pairel 01, Pairel 05, Giordano ].

V. Srinivasan [Srinivasan 93] propose d'améliorer le modèle de Requiha en définissant les limites des zones de tolérance par les surfaces enveloppes d'une sphère dont le centre se déplace sur les surfaces tolérancées. R. Jayaraman et V. Srinivasan [Jayaraman 89] proposent ensuite de traduire les tolérances par des exigences fonctionnelles sur les frontières virtuelles (Virtual Boundary Requirement). On retrouve les états au maximum et minimum de matière de chaque pièce. La notion de demi-espace avec un coté matière pour définir les limites virtuelles permet de vérifier la non interférence de la matière et donc de contrôler l'assemblage.

Robinson étend ce concept à la pièce entière et obtient, à l'aide de 7 règles de construction, un gabarit au maximum de matière pour chaque pièce "Maximal Material Part" [Robinson 98]. Si les gabarits au maximum de matière englobent toutes les pièces de la classe variationnelle alors celle-ci respecte la condition fonctionnelle. Malheureusement ces travaux ne permettent pas de modéliser les défauts par un outil mathématique utilisable dans un calcul de chaînes de cotes.

### II.2.b Tolérancement vectoriel

Wirtz définit une écriture originale des tolérances qui s'éloigne de l'écriture normalisée [Wirtz 89]. Chaque surface est positionnée par un point et un vecteur dans une base donnée. La position, l'orientation, la forme et la dimension sont modélisées par quatre vecteurs indépendants du point de vue des tolérances [Wirtz 91].

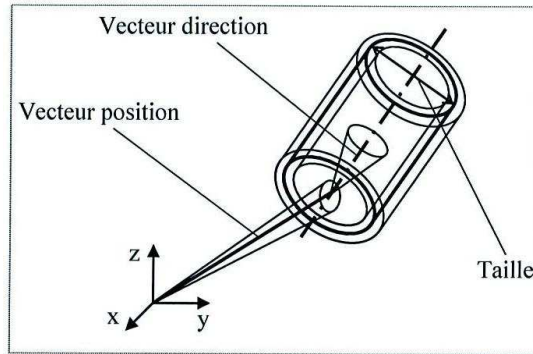


Fig. 1.6 – Tolérancement vectoriel selon A. Wirtz

Ces vecteurs varient autour de deux paramètres : l'un associé à la géométrie nominale de la pièce et l'autre aux écarts admissibles sur les surfaces. Dans la définition des écarts, chaque composante de vecteur est associée à un intervalle de tolérance. Le tolérancement de la pièce s'obtient en ajoutant les vecteurs caractérisant les défauts à ceux définissant la géométrie nominale. Ce modèle offre un outil intéressant pour la fabrication et le contrôle de qualité [Wirtz 93] mais se limite à l'écriture et à l'étude du tolérancement de pièces isolées et ne propose pas d'analyser les assemblages et ne considère donc pas l'aspect fonctionnel du mécanisme.

### II.2.c Tolérancement déclaratif

D. Gaunet présente un modèle de tolérancement vectoriel sensiblement différent de celui de A. Wirtz [Gaunet 93], puisqu'il y intègre la théorie des **S**urfaces **A**ssociées **T**echnologiquement et **T**opologiquement (**SATT**) et d'**É**lément **G**éométrique de **R**éférence **M**inimum (**EGRM**) [Clément 94] de A. Clément.

Le concept SATT permet de raisonner sur des surfaces fonctionnelles positionnées les unes par rapport aux autres. Il propose de remplacer les surfaces par les éléments géométriques simples nécessaires au tolérancement qui les caractérise (centre d'une sphère, axe d'un cylindre,...). Pour ce faire, A. Clément introduit la notion de classe d'invariance caractérisée par son degré d'invariance et ses déplacements autorisés en rotation et translation et donne les définitions suivantes :

- Un **SATT** est une paire de surfaces ou une paire composée d'une surface et d'un SATT ou encore une paire de SATT appartenant au même solide et associés pour des raisons fonctionnelles.
- Un **EGRM** d'une des 7 classes de surfaces est l'ensemble minimum de point, droite plan nécessaire et suffisant pour définir le sous-groupe laissant globalement invariante la classe considérée.

Chaque SATT appartient à une des 7 classes d'invariance (tab. 1.1).


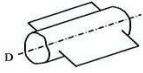
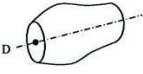

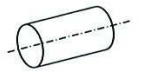
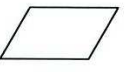

Classe de surface	Degré d'invariance	Sous-groupe laissant la surface invariante	EGRM
 Complexe	0	Déplacement identité	Plan, Droite, Point
 Prismatique	1	Translation unidirectionnelle	Plan parallèle à D, Droite parallèle à D
 Révolution	1	Rotation autour d'une droite	Droite D, Point appartenant à D
 Hélicoïdale	1	Mouvement hélicoïdal	Droite (axe de la vis)
 Cylindrique	2	Rotation et translation autour d'un même axe	Droite (axe du cylindre)
 Plane	3	Mouvement plan	Plan parallèle
 Sphérique	3	Mouvement sphérique	Point (centre de la sphère)

Table 1.1 – Les 7 classes de surfaces

Un SATT peut être positionné par son EGRM dans le repère d'étude ou relativement à un autre SATT par la position relative de leur EGRM respectif. La position de deux sphères par exemple est ramenée à la position relative de leur centre respectif : ces deux points peuvent être coïncidents ou distants d'une valeur donnée. On recense 13 contraintes de positions relatives (de type distance, coïncidence, angle, ...) permettant de positionner l'ensemble des SATT deux à deux [Clément 97]. A chaque contrainte est associé un paramètre de mise en position.

En faisant l'hypothèse de faibles variations autour de ces paramètres, Gaunet les modélise sous forme de torseurs de petits déplacements qu'il appelle "torseur de tolérancement".

Fort de cette modélisation, Gaunet l'enrichit afin de modéliser les interactions au sein du système mécanique [Gaunet 94]. Il identifie deux types de contacts :

- Le contact fixe lorsque les deux surfaces en vis-à-vis n'ont aucun mouvement relatif entre elles. Ce type de contact lie les petits déplacements des pièces qui engendrent des contraintes d'égalité.

- Et le contact flottant, pour tous les autres cas, qui limite le déplacement des pièces (jeu) et génère des contraintes d'inégalité.

La modélisation d'une tolérance géométrique est basée sur la définition de la position relative entre trois éléments : l'élément tolérancé, la zone de tolérance et le système de référence [Sellakh 00]. Cette définition permet d'obtenir des contraintes (d'égalité et d'inégalité) sur les composantes des torseurs de tolérancement auxquelles s'ajoute les nouvelles égalités et inégalités de contact.

Ce modèle permet d'étudier non plus seulement la pièce mais l'assemblage tout entier. Les aspects fonctionnels tel que la montabilité ou le jeu minimum entre deux surfaces peuvent ainsi être appréhendés. Cependant, le fait d'associer les surfaces par paires ne permet pas de traduire certains cas de la norme (localisation d'un groupe de trous par exemple). De plus la construction de l'arbre bianire des SATT est laissée à l'appréciation du concepteur et n'est pas automatique (aucune règles de construction données). D'autre part l'identification des variables et contraintes influentes rend l'optimisation complexe pour des assemblages présentant beaucoup de pièces. Enfin, ce modèle ne permet pas de calculer les relations entre tolérances dans une chaîne de tolérances tridimensionnelle. Néanmoins, ce fut la première tentative de définition d'un modèle intégrable dans un logiciel de CFAO d'assistance au tolérancement.

#### II.2.d Tolérancement cinématique

Dans un premier temps, le tolérancement cinématique fut développé pour effectuer le transfert de cotes et l'analyse de variations géométriques dans le domaine des procédés d'usinage [Rivest 94a]. Ce modèle de tolérancement original proposé par C. Fortin et L. Rivest se base sur l'analogie entre le tolérancement et la robotique et plus précisément entre la zone de tolérance et l'espace de travail d'un robot manipulateur [Rivest 93].

Louis Rivest propose de modéliser la position et la taille de la zone de tolérance par un mécanisme cinématique [Rivest 94b]. Pour ce faire il définit différentes formes de zones de tolérance :

- *Cylindrique* : caractérisée par un axe de symétrie
- *Plane* : caractérisée par un plan de symétrie
- *particulière* : regroupant l'ensemble des autres formes (conique, sphérique, ...)

et de genres :

- *Creux* : l'élément tolérancé doit être inclu dans un espace
- *Solide* : l'élément tolérancé doit être exclu d'un volume
- *Hermaphrodite* : l'élément tolérancé doit être inclu dans un volume et exclu d'un autre (zone de tolérance comprise entre deux cylindres concentriques de rayons différents par exemple).

Il définit ensuite deux vecteurs  $\vec{V}_E$  et  $\vec{V}_I$ . Le vecteur externe  $\vec{V}_E$  positionne l'élément de symétrie de la zone de tolérance (axe pour une zone cylindrique, vecteur normal pour une zone plane). Le vecteur interne  $\vec{V}_I$  modélise la direction de mesure de la taille de la zone de tolérance.

Rivest définit un mécanisme cinématique qui devra permettre de positionner et d'orienter les deux vecteurs  $\vec{V}_E$  et  $\vec{V}_I$  dans le référentiel de définition de la zone de tolérance. Il choisit une structure cinématique classique permettant de découpler position et orientation. Elle comporte 14 articulations décomposées en deux chaînes sérielles (fig. 1.7). Les 14 paramètres (R pour rotation et T pour translation) associés à ces degrés de liberté peuvent être libres, limités ou bloqués :

- Les six premiers paramètres positionnent et orientent le vecteur  $\vec{V}_E$  par rapport au référentiel  $R_O$ .
- Les six suivants positionnent et orientent le vecteur  $\vec{V}_I$  par rapport au vecteur  $\vec{V}_E$ . Les paramètres  $T_t$  et  $T_p$  définissent la taille de la zone de tolérance.
- Les deux derniers paramètres appelés paramètres de redressement pilotent l'orientation du repère lié à l'élément tolérancé.

Après avoir modélisé chaque zone de tolérance, le mécanisme cinématique permet d'effectuer les

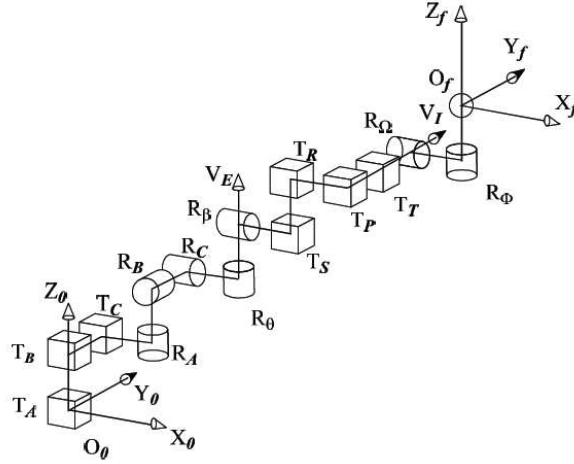


Fig. 1.7 – Structure cinématique définie par Louis Rivest [Rivest 94b]

transferts de tolérance. Pour ce faire on commence par effectuer le balayage complet de chacune des zones de tolérance de la chaîne de tolérance. Puis on définit une zone neutre intersection de l'ensemble des images extrêmes de la zone de tolérance. Si l'élément fabriqué peut être confiné dans cette zone neutre, alors cette zone est transférable. Une simplification de la zone obtenue dans le référentiel d'accueil est généralement nécessaire afin d'obtenir une forme de zone de tolérance interprétable par le fabricant.

La mise en œuvre de la méthode de détermination de la zone neutre telle qu'elle est définie par Rivest n'est pas intégrable au sein d'un logiciel de CFAO [Bennis 97]. C'est pourquoi F. Bennis et L. Pino utilisent les matrices de transformations homogènes entre les référentiels d'origine et d'accueil pour simplifier le calcul de transfert de zone de tolérance [Bennis 98], [Pino 00]. En prenant en compte les relations entre les différentes liaisons du modèle cinématique, les mouvements de l'organe terminal ainsi que les contraintes de fermeture de boucle de la structure cinématique définissent un système d'équations non linéaires. Le calcul du déterminant de la matrice jacobienne associée à la structure cinématique (généralement calculée sur l'organe terminal) génère une équation qui nous renseigne sur la faisabilité du transfert et le cas échéant, décrit la forme de la zone de tolérance après transfert. Il semble que ce modèle a été abandonné, sans doute à cause de sa complexité.

L'utilisation d'outils de la robotique a inspiré bon nombre de travaux de recherche. En effet, L. Joskowicz étoffe l'analyse cinématique du tolérancement de mécanismes plans en prenant en compte les jeux dans les liaisons lorsqu'il recherche les positions et orientations extrêmes du mécanisme tolérancé [Sacks 97]. Les équipes Canadiennes [Laperrière 00] utilisent la matrice Jacobienne dans leur modèle "Jacobian Torsor". Les modèles des T-maps<sup>®</sup> et des domaines rappellent également la définition des espaces de travail en robotique [Giordano 87].

## II.2.e Par développement limité

D'autres méthodes utilisent également les matrices de passage pour modéliser les positions relatives des surfaces entre-elles. L'écriture d'une fermeture de boucle d'assemblage sous forme d'un produit de matrices permet d'obtenir les équations de tolérancement. Whitney obtient les relations linéaires entre les variations des variables décrivant la géométrie et celles décrivant les conditions fonctionnelles par développement en série de Taylor au premier ordre des équations précédentes [Whitney 94]. Dans la méthode DLM (Direct Linearization Method), présentée par Chase, toutes les variations géométriques linéaires et angulaires peuvent être prises en compte [Chase 96]. Cependant, contrairement à ce qu'il suppose, les relations linéaires entre variables d'écarts qu'il obtient ne sont pas nécessairement les mêmes que les relations linéaires que l'on cherche à déterminer entre les tolérances des surfaces de l'assemblage et la tolérance fonctionnelle, comme nous le montrerons plus tard. De son côté, Franciosa propose une procédure numérique pour simuler les contraintes d'assemblage, en utilisant ce formalisme des matrices

de passage linéarisées [Franciosa 09]. L'utilisation de matrices de passage linéarisées est équivalente à l'utilisation de torseurs de petits déplacements en ce sens que cela correspond aux mêmes hypothèses et que tout calcul fait avec les matrices peut être réalisé avec les torseurs. Toutefois l'utilisation des torseurs permet une écriture indépendante du repère qui peut être choisi en dernier ressort pour expliciter les calculs.

Cependant, dans le cas du tolérancement statistique, Jean-Marc Linares a démontré les limites du développement au premier ordre. La zone de tolérance n'a en effet pas la même forme optimale suivant l'ordre de linéarisation de l'étude [Boukebbab 03].

Pierre Bourdet considère que toutes les surfaces de liaison comportent des défauts d'orientation et de position par rapport aux surfaces nominales définies en bureau d'étude. Pour identifier ces écarts, à chaque surface réelle (extraite de la mesure) est associée une surface de substitution de forme parfaite construite à l'aide d'un critère prédéfini (moindre carré, tangent extérieur matière minimisant l'écart maximum, ...). Ainsi, il filtre le défaut de forme supposé négligeable devant les défauts de position et d'orientation. Pour chacune de ces surfaces de substitution est construit un repère de positionnement (fig. 1.8).

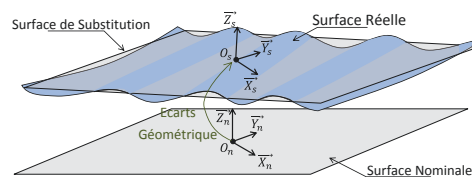


Fig. 1.8 – Position et orientation de la surface de substitution

Les écarts géométriques sont mesurés entre les repères associés à la géométrie nominale et ceux associés aux surfaces de substitution. En faisant l'hypothèse que les écarts restent faibles, il se place dans le cas de petits déplacements et peut linéariser les composantes de déplacement et de rotation. Les deux vecteurs de position et d'orientation obtenus sont formalisés sous forme d'un "torseur de petits déplacements" [Clement 88, Bourdet 95b].

Quatre types de torseurs sont utilisés pour décrire un assemblage avec ou sans jeu [Ballot 95b, Ballot 97] :

- **Le torseur écarts**, qui décrit les écarts géométriques entre les surfaces nominales et les surfaces de substitution. Associé à la théorie des SATT, on peut définir un type de torseur écarts pour chacune des 7 classes d'invariance. Il devient ainsi possible de prédire la forme du torseur écarts de tout type de géométrie.
- **Le torseur défauts**, qui décrit les écarts géométriques entre deux éléments géométriques d'une même pièce (soustraction d'écarts quelle que soit la position de la surface nominale).
- **Le torseur jeux (ou torseur lien [Kamali-Nejad 09])**, qui représente les petits déplacements permis par le jeu entre deux surfaces nominales de deux pièces nominale en contact.
- **Le torseur pièce**, qui définit l'écart de position d'une pièce par rapport à sa position nominale dans le mécanisme.

Ce concept proposé dès les années 1970 [Bourdet 76] est, aujourd'hui, largement répandu dans la modélisation d'écarts et jeux géométriques. On le retrouve dans divers applications. François Villeneuve, par exemple, l'utilise pour prédire les écarts relatifs entre surfaces d'une même pièce connaissant le processus de fabrication [Kamali-Nejad 09].

## II.3 Prise en compte de l'assemblage : Équations de tolérancement

### II.3.a Modélisation de l'assemblage

Afin d'écrire les relations liant les variables de jeux, d'écarts et d'exigences géométriques, il est nécessaire de connaître les chemins d'assemblage relatifs à chaque condition fonctionnelle. On appelle chemin d'assemblage, l'ensemble des liaisons en série reliant les deux surfaces entre lesquelles s'applique la condition fonctionnelle. Il s'agit de définir quelles sont les surfaces de liaison qui ont une influence sur la condition fonctionnelle et de quantifier cette influence.

La majorité des travaux dans le domaine utilisent la théorie des graphes [Linares 93], [Teissandier 97]. Différents formalismes permettent de décrire les liaisons, les exigences et les pièces influentes.

Mejbri [Mejbri 05], parmi tant d'autres [Ballu 07], [Legrais 05] propose de modéliser l'assemblage entre une surface terminale et une base par l'ensemble des chemins d'assemblage permettant de passer de l'une à l'autre. Chacun d'entre eux est décrit par des arcs représentant les liaisons et des nœuds représentant les surfaces de contact (fig. 1.9). Il propose dans sa thèse [Mejbri 04] une méthode de génération automatique de ce type de graphe. Il l'utilise ensuite pour identifier les paramètres influents sur la surface terminale et étudier la spécification géométrique.

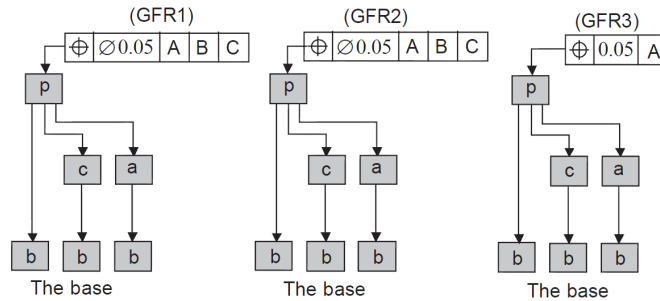


Fig. 1.9 – Graphe de liaisons selon Mejbri [Mejbri 05]

La méthode CLIC de Bernard Anselmetti modélise l'assemblage en se basant sur des axiomes et une description de la géométrie [Anselmetti 02]. A l'aide de Tableaux de Mise en Position (TMP) complétés par le concepteur, Anselmetti identifie les surfaces primaires, secondaires et tertiaires de liaison et génère automatiquement les exigences et spécifications géométriques assurant la fonctionnalité et la montabilité du mécanisme. Cette méthode sera décrite plus précisément dans le paragraphe (II.4.a).

Armillotta [Armillotta 07] reconnaît automatiquement les surfaces appartenant au chemin d'assemblage. Il utilise un critère géométrique (aire,...) pour hiérarchiser les surfaces recensées. Il se sert ensuite de cette classification pour définir la cotation du mécanisme.

Mathieu et Ballu [Ballu 07] proposent de déterminer les surfaces influentes pour ne pas tenir compte des autres et ainsi réduire le graphe d'assemblage. Ils identifient ensuite [Ballu 99] les degrés de liberté autorisés par chaque surface et en déduisent le type de spécification adaptée. En fonction du type d'exigence fonctionnelle, ils préconisent :

- Un modificateur de maximum de matière pour les exigences de montabilité.
- Un modificateur de minimum de matière pour les exigences de précision d'assemblage.
- Un modificateur de maximum de matière pour les exigences de précision avec jeu minimum.

Mounaud [Mounaud 09] dans ses travaux d'analyse de défauts géométriques de pièces souples utilise l'outil Gaia<sup>®</sup> (Graph Analysis for Interfaces of Assembly) pour modéliser l'assemblage et sa gamme de montage. Cet outil se base sur la méthode des graphes d'assemblage et la notion de Key Characteristics (KC : exigences fonctionnelles que l'assemblage doit respecter) [Ballu 06]. Il permet la représentation des interactions et des exigences fonctionnelles entre les différents composants d'un assemblage. Avec cette représentation il peut découper son mécanisme en différents niveaux (imbrication des boucles d'assemblage) [Falgaron 06] et hiérarchiser les différentes fonctions qu'il doit réaliser pour chaque niveau. Ainsi,

il devient possible de définir la spécification géométrique de chaque pièce du mécanisme (fig. 1.10). L'outil Gaia® lui permet d'effectuer l'étude fonctionnelle complète du mécanisme et l'analyse d'impact dès le début de la chaîne numérique : du dimensionnement du mécanisme jusqu'à sa production.

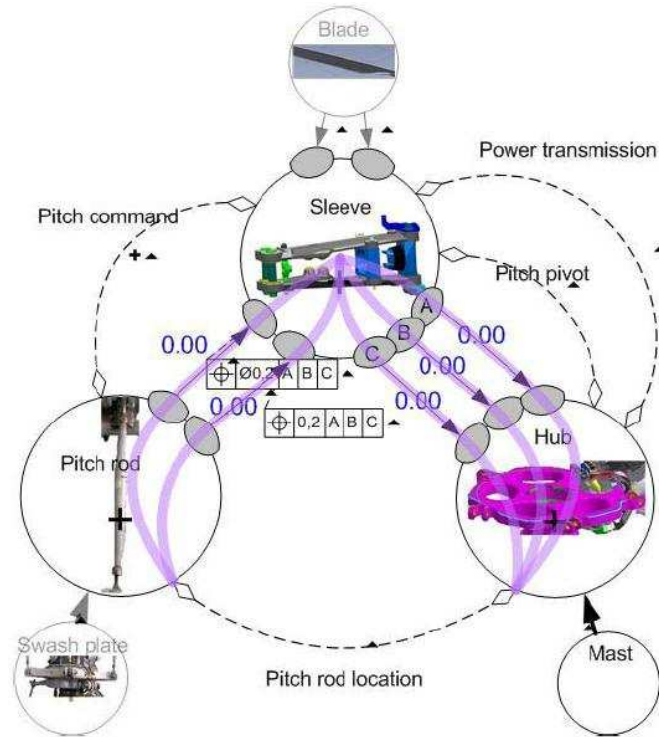


Fig. 1.10 – Analyse d'impact par boucle d'influence GAIA® sur un mécanisme de rotor d'hélicoptère [Ballu 06]

Les travaux de Gaëtan Legrais [Legrais 05] ont permis d'intégrer un module d'assistance à la spécification au sein du modèleur 3D Top-Solid®. Afin de guider le choix du concepteur dans le tolérancement et la définition du système de référence associé, il utilise la théorie des mécanismes et l'étude du rang du système statique ou cinématique formé par les normales au contact de chaque liaison. Il permet ainsi d'assurer la cohérence de la spécification par rapport à la norme et à la géométrie.

Nos recherches se baseront sur ces travaux pour la définition qualitative du tolérancement. La méthode de modélisation de la topologie du mécanisme sera détaillée dans le chapitre suivant (cf. § III.1).

Une fois les défauts géométriques modélisés par un outil mathématique et les boucles d'assemblage identifiées, différentes méthodes permettent d'écrire pour chaque boucle d'assemblage les relations entre les variables de jeux, d'écarts et d'exigences fonctionnelles.

### II.3.b Loi de comportement

La méthode  $\Delta tol$  est un outil permettant de simuler la propagation des défauts géométriques des pièces d'un mécanisme. Cette méthode est une généralisation tridimensionnelle de la méthode des  $\Delta l$  développée par Pierre Bourdet pour la gestion des cotes fabriquées en 1D [Bourdet 73]. En effet, elle se base sur le comportement géométrique d'assemblage de pièces rigides [Ballot 95a, Thiebault 01] modélisé par l'outil "torseur de petits déplacements".

Chaque surface réelle est modélisée par une surface de substitution de forme parfaite. Afin de modéliser de la manière la plus réaliste possible le comportement au contact, le critère de construction de la surface de substitution est : tangente extérieure matière minimisant l'écart maximal. Un repère de positionnement



est associé à chaque surface de substitution construite à partir de la surface réelle. La position de chaque entité est parfaitement définie par :

- *La position du repère de la surface de substitution  $S_a^*$  par rapport à celle du repère de la surface nominale associée  $S_a$*  : Cet écart est appelé "écart de situation" :  $\{E_{S_a^*/S_a}\}$  (fig. 1.11). Du fait de cet écart, la pièce  $P_1$  peut varier par rapport à sa position initiale. Ces variations géométriques de position et d'orientation sont représentées par un torseur de petits déplacements appelé torseur écarts de la pièce  $P_1$  :  $\{T_{S_a^*/P_1}\}$ . Les composantes de ce torseur, qui sont associées aux degrés de liberté de la classe de la surface seront nulles. Et les autres représentent les petits déplacements de la pièce engendrés par les écarts de la surface de substitution par rapport à la surface nominale.

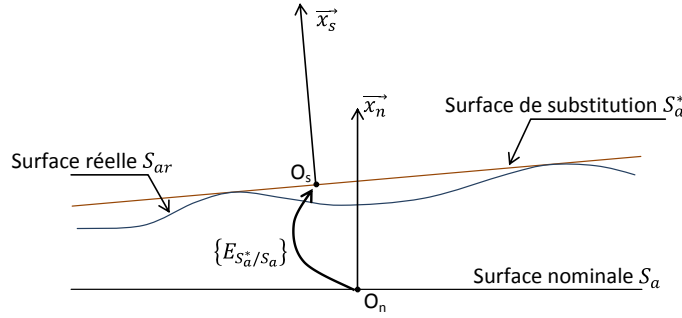


Fig. 1.11 – Écart de situation d'une surface plane

- *Les écarts entre deux surfaces de substitution  $S_a^*$  et  $S_b^*$  réalisant une liaison entre les pièces  $P_1$  et  $P_2$*  : De la même manière que les écarts de situation, les écarts induits par une liaison entre deux composants peuvent être modélisés par un torseur de petits déplacements appelé "torseur lien" :  $\{T_{S_a^*/S_b^*}\}$ . Les composantes de ce torseur, associées aux degrés de liberté de la liaison, sont indéterminées [Bourdet 95a, Thiebault 01].
- *La position des pièces  $P_1$  composant le mécanisme dans un repère de référence  $R$*  :  $\{T_{P_1/R}\}$

Dans le cas d'un empilage de pièces (liaisons en série), les variations géométriques de la surface terminale sont obtenues en calculant la somme des torseurs écarts et jeux composant le mécanisme (fig. 1.12). Pour les systèmes mécaniques comportant des liaisons en parallèle, le montage est possible uniquement s'il y a égalité entre les différentes branches de l'assemblage.

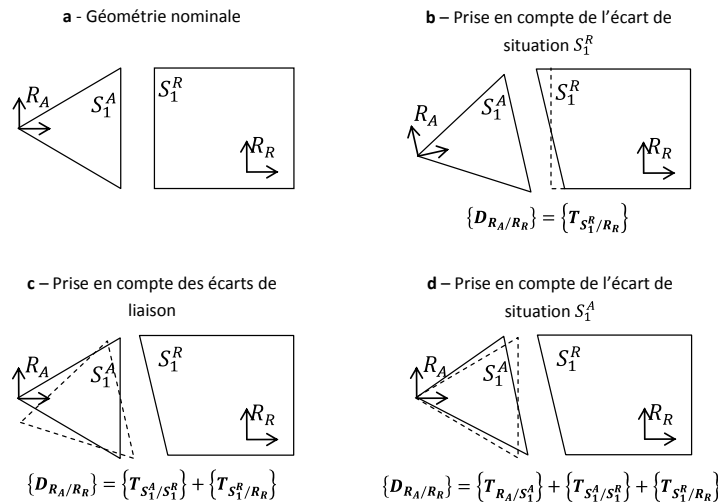


Fig. 1.12 – propagation de défauts entre deux composants rigides [Mounaud 09]

La loi de comportement géométrique est donnée par l'égalité torsorielle obtenue en calculant la fermeture géométrique suivante : pour chaque liaison du mécanisme formé d'une surface de substitution  $S_a$  appartenant à la pièce  $P_1$  avec une surface de substitution  $S_b$  appartenant à la pièce  $P_2$ , on écrit une relation linéaire (eqn. 1.1). Cette équation relie le torseur lien, aux torseurs écarts et positions de référence (fig. 1.13) :

$$\{T_{S_a/S_b}\} = (\{T_{S_a/P_1}\} + \{T_{P_1/R}\}) - (\{T_{S_b/P_2}\} + \{T_{P_2/R}\}) \quad (1.1)$$

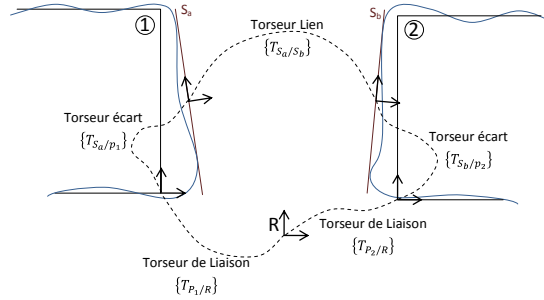


Fig. 1.13 – Fermeture de chaîne torsorielle

Ce type de fermeture de chaîne permet d'obtenir  $6 * p$  équations cinématiques (avec  $p$  le nombre de liaisons) et  $6 * (n - 1) + \sum_p k_i$  inconnues cinématiques (avec  $n$  le nombre de solides et  $k_i$  les degrés de liberté de la liaison). Max Giordano utilise la relation torsorielle obtenue par fermeture de chaîne géométrique directement sur les boucles d'assemblage. Il obtient ainsi  $6 * (p - n + 1)$  équations cinématiques avec  $\sum_p k_i$  inconnues cinématiques. Ces deux méthodes permettent d'obtenir la même relation d'hyperstatisme (eqn. 1.2) :

$$m_c - h = I_c - E_c = \sum_p k_i - 6 * p + 6 * n - 6 \quad \text{avec} \begin{cases} h = \text{degré d'hyperstatisme} \\ m_c = \text{nombre de mobilités} \end{cases} \quad (1.2)$$

Ces deux méthodes donnent donc les mêmes résultats. Mais la répartition différentes des inconnues et équations les rendent plus ou moins intéressantes en fonction de la topologie de l'assemblage. En effet, dans le cas de mécanismes présentant un grand nombre de liaisons en parallèles, la méthode de calcul définie par Pierre Bourdet est préférable à celle passant pas les boucles d'assemblage. Par contre, pour des mécanismes à topologie plutôt sérielle, le nombre de boucles d'assemblage est moins important que le nombre de liaisons. La méthode de calcul de Max Giordano sera donc préférable.

En supprimant les variables indéterminées qui correspondent aux degrés de liberté des liaisons étudiées, on obtient les équations de compatibilité de chaque liaison composant le mécanisme. On en déduit une relation linéaire reliant les composantes des torseurs de petits déplacements de chaque surface de liaison à celles de la surface terminale sur laquelle s'applique la condition fonctionnelle [Bourdet 07]. Le comportement géométrique de l'assemblage s'obtient par résolution de ce système (méthode du pivot de Gauss,...).

L'apport de ce formalisme réside dans l'élimination automatique des variables traduisant les degrés de liberté des liaisons, tandis que dans les autres méthodes, cette élimination est réalisée implicitement par un paramétrage approprié. Ce formalisme est employé dans des logiciels d'analyse du comportement géométrique des mécanismes tels que AnaTol<sup>®</sup> et MECAMaster<sup>®</sup>.

Cependant, ces équations ne font que traduire l'assemblage de pièces avec défauts et jeux en fonction des composantes de petits déplacement. Il reste à prendre en compte :

- des tolérances "t" qui limitent les défauts,
- des conditions de rigidité des contacts qui limitent les jeux.

Pour ce faire, il faut prendre en compte l'étendue des surfaces. Chaque surface tolérancée sera caractérisée par ses points extrêmes formant une forme convexe (par exemple un parallélogramme sera caractérisé par ses 4 sommets).

Il devient ainsi possible d'étudier les déplacements maximaux des points caractéristiques des surfaces tolérancées. Si ces déplacements restent inférieurs à la zone de tolérance associée, alors la spécification géométrique est respectée. Ce système d'inéquations permet de mener des activités de synthèse et d'analyse de tolérances. En considérant les composantes de petits déplacements modélisant les défauts géométriques des surfaces de liaison ainsi que l'étendue des jeux comme des variables aléatoires et en leur associant une densité de probabilité, il est possible d'effectuer l'analyse statistique du respect de la condition fonctionnelle par une méthode de type Monte-Carlo.

### II.3.c Jacobian torseur

Les équipes canadiennes de Laperrière et Desrochers ont développé un outil permettant d'optimiser le tolérancement d'un mécanisme en donnant la contribution de chaque tolérance intermédiaire sur la condition fonctionnelle [Ghie 05]. Ce modèle est appelé "*Unified Jacobian-Torsor Model*".

Pour chaque surface de liaison influente sur la condition fonctionnelle finale, les écarts géométriques autorisés par le tolérancement sont modélisés à l'aide du modèle de torseur de petits déplacements dans un repère local " $FE_i$ ". Tous ces petits déplacements peuvent être écrits dans le même repère global au mécanisme " $FR$ " à l'aide d'une matrice de passage appelée matrice Jacobienne " $J$ " [Laperrière 02]. On obtient ainsi un système d'équations de tolérances écrit sous forme matricielle (eqn. 1.3).

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \\ \delta \end{bmatrix}_{FR} = \begin{bmatrix} J_{FE_1} & \dots & J_{FE_{n-1}} & J_{FE_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \\ \delta \end{bmatrix}_{FE_1} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \\ \delta \end{bmatrix}_{FE_n} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Les valeurs maximales  $\bar{x}$  et minimales  $\underline{x}$  des petites translations et rotations permettant le respect de la spécification géométrique associée à la surface sont calculées en prenant en compte l'étendue de la surface et la dimension de sa zone de tolérance. Ces valeurs sont évaluées indépendamment les unes des autres : les variations extrêmes d'une composante de petit déplacement sont étudiées en considérant l'ensemble des autres nulles [Desrochers 03]. Ces résultats sont exprimés sous forme d'une matrice 6x2, où chaque colonne correspond respectivement aux limites inférieures et supérieures des 6 composantes de petits déplacements (eqn. 1.4).

$$\begin{bmatrix} \underline{u} & \bar{u} \\ \underline{v} & \bar{v} \\ \underline{w} & \bar{w} \\ \underline{\alpha} & \bar{\alpha} \\ \underline{\beta} & \bar{\beta} \\ \underline{\delta} & \bar{\delta} \end{bmatrix}_{FR} = \begin{bmatrix} J_{FE_1} & \dots & J_{FE_{n-1}} & J_{FE_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} & \bar{u} \\ \underline{v} & \bar{v} \\ \underline{w} & \bar{w} \\ \underline{\alpha} & \bar{\alpha} \\ \underline{\beta} & \bar{\beta} \\ \underline{\delta} & \bar{\delta} \end{bmatrix}_{FE_1} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} \underline{u} & \bar{u} \\ \underline{v} & \bar{v} \\ \underline{w} & \bar{w} \\ \underline{\alpha} & \bar{\alpha} \\ \underline{\beta} & \bar{\beta} \\ \underline{\delta} & \bar{\delta} \end{bmatrix}_{FE_n} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

### II.3.d Linéarisation des matrices de passage

Bien que les méthodes précédentes, utilisent des formalismes différents, elles permettent d'obtenir les mêmes équations de tolérance linéarisées. Celles-ci se retrouvent également en utilisant un autre modèle : les matrices de passages homogènes. La linéarisation de cet outil plus utilisé dans la littérature anglo-saxonne et en particulier par Chase [Chase 96] avec sa méthode "Direct Linearization Method" est parfaitement équivalent à l'outil torseur.

En effet, dans un espace à 3 dimensions, la position et l'orientation d'un objet par rapport à un repère de référence sont définies par une matrice de passage  $P$  (4\*4). Cette matrice de passage se décompose en une partie rotation  $R$  (matrice 3\*3) définissant l'orientation de l'objet et une partie translation  $T$  (vecteur 3\*1) définissant la position de l'objet (eqn. 1.5) :

$$P = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

On peut définir la matrice  $R$  par rotation d'angle  $\Theta$  autour d'un vecteur unitaire  $\vec{e}$  de composantes  $(e_x, e_y, e_z)$  dans le repère de référence (cf. annexe A). La matrice de rotation  $R$  est alors égale à  $R(\vec{e}, \Theta)$  (eqn. 1.6) :

$$R(\vec{e}, \Theta) = (1 - \cos(\theta)) * \begin{bmatrix} e_x^2 & e_x * e_y & e_x * e_z \\ e_x * e_y & e_y^2 & e_y * e_z \\ e_x * e_z & e_y * e_z & e_z^2 \end{bmatrix} + \cos(\theta) * I + \sin(\theta) * \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Dans l'hypothèse des petits déplacements, en linéarisant le résultat précédent, on retrouve la même forme matricielle (eqn. 1.7) que celle utilisée dans le modèle des torseurs de petits déplacements que nous détaillerons dans le chapitre suivant (cf. § I).

$$R(\vec{e}, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 1 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

### II.3.e Tolérancement paramétrique

Le tolérancement paramétrique consiste à écrire les relations entre les limites de variation des paramètres géométriques associés aux exigences fonctionnelles  $y$  et les paramètres associés à la géométrie du mécanisme  $x_k$ . Les relations géométriques sont donc de la forme (eqn. 1.8) :

$$y = f(x_k)_{1 \leq k \leq n} \quad y_{min} \leq y \leq y_{max} \quad (1.8)$$

De manière générale, ce type de tolérancement est plutôt réservé aux mécanismes plans, pour lesquels la relation précédente s'obtient plus aisément. Mais, la géométrie des pièces au sein d'un modèleur CAO étant définie de manière paramétrique, de nombreux logiciels tels que *Enventive*® utilisent ce tolérancement pour étudier l'impact des petites variations géométriques des pièces composant un mécanisme.

La relation 1.8 est obtenue en faisant varier chaque paramètre indépendamment des autres. En restant dans le domaine des petits déplacements, on obtient l'équation de tolérancement linéarisée de la forme (eqn. 1.9) :

$$\partial y = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} * dx_k \quad (1.9)$$

Le terme  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  représente l'influence du paramètre  $x_k$  sur le paramètre fonctionnel  $y$ . Il introduit le concept de coefficient d'influence qu'on retrouvera par la suite dans de nombreuses autres méthodes.

Glancy utilise ce formalisme pour étudier l'impact des variations géométriques sur les exigences fonctionnelles à un ordre de développement plus élevé et de manière statistique [Glancy 99].

La résolution ou l'optimisation du tolérancement d'un système mécanique nécessite de connaître les systèmes d'équations et d'inéquations reliant les valeurs des tolérances et non les paramètres géométriques. Quelle que soit la méthode d'obtention des équations de tolérancement, leur traduction en ce type de système est loin d'être évidente. Différentes méthodes ont été présentées dans la littérature scientifique, nous proposons, sans être exhaustifs, d'en présenter les principales ci-dessous.

## II.4 Traitement du système d'inéquations de tolérancement

### II.4.a Méthode CLIC

La méthode **CLIC** (**C**otation en **L**ocalisation avec **I**nfluence des **C**ontacts) a été développée pour assister le concepteur lors du tolérancement qualitatif et quantitatif d'assemblages mécaniques. Cette méthode systématique se base sur des règles explicites [Anselmetti 08a, Anselmetti 08b]. Elle permet de traduire des données géométriques et technologiques (priorité des contacts,...), mises en forme par le concepteur dans des tableaux, en exigences puis spécifications géométriques. Cette méthode permet également d'optimiser les choix géométriques et dimensionnels lors de la conception (fig. 1.14).

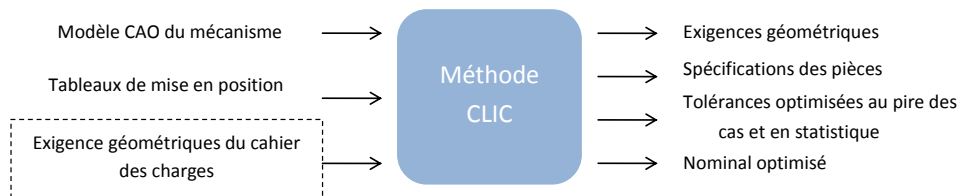


Fig. 1.14 – Processus de la méthode CLIC

Cette méthode se déroule en plusieurs étapes :

- **Modélisation de l'assemblage** : description des liaisons par tableaux de mise en position
- **Tolérancement qualitatif**
  - ▷ **Spécification des jonctions** : génération des exigences géométriques et de la cotation associée à chaque liaison.
  - ▷ **Synthèse des spécifications** : identification de la "boucle de contact" et génération des spécifications géométriques des pièces pour chaque exigence fonctionnelle entre une surface terminale et la base du mécanisme.
- **Tolérancement quantitatif** : Quantification des défauts autorisés par le tolérancement précédemment défini. Cette étude est menée par la méthode des droites d'analyse.

#### ◊ Modélisation de l'assemblage

Un assemblage mécanique est composé de pièces ou d'ensembles de pièces en liaison les uns avec les autres. Chaque ensemble composé uniquement de pièces assemblées en série constitue un sous-bloc. Ainsi, l'ensemble du mécanisme est défini par un empilement (liaison en série) de blocs composés de sous-bloc. Chaque bloc et sous-bloc est mis en position par rapport au reste de l'assemblage par une "jonction". Cette jonction est composée d'une ou plusieurs "liaisons en parallèle". Chaque liaison est formée par deux entités géométriques en vis-à-vis appartenant à deux pièces distinctes.

Le mécanisme est modélisé par la description de ses jonctions. Le concepteur remplit le tableau de mise en position de chaque jonction par le biais du tableur Excel®. Il y précise la nature et la prépondérance des surfaces de liaison qui la composent. Le tableau se présente sous la forme suivante (fig. 1.15) :



Les quatre règles de cotation suivantes permettent de définir la cotation des surfaces de liaison à partir de leur nature et de leurs exigences géométriques définies précédemment (fig. 1.17 & 1.18) :

- le gap des entités surfaciques primaires impose de spécifier la forme des surfaces en contact
- le gap des entités secondaires ou tertiaires impose une spécification d'orientation par rapport à la référence primaire
- le jeu ou le serrage d'une entité ajustement primaire impose de spécifier les diamètres des pièces
- le jeu d'une entité ajustement secondaire ou tertiaire impose de spécifier les diamètres virtuels au maximum de matière

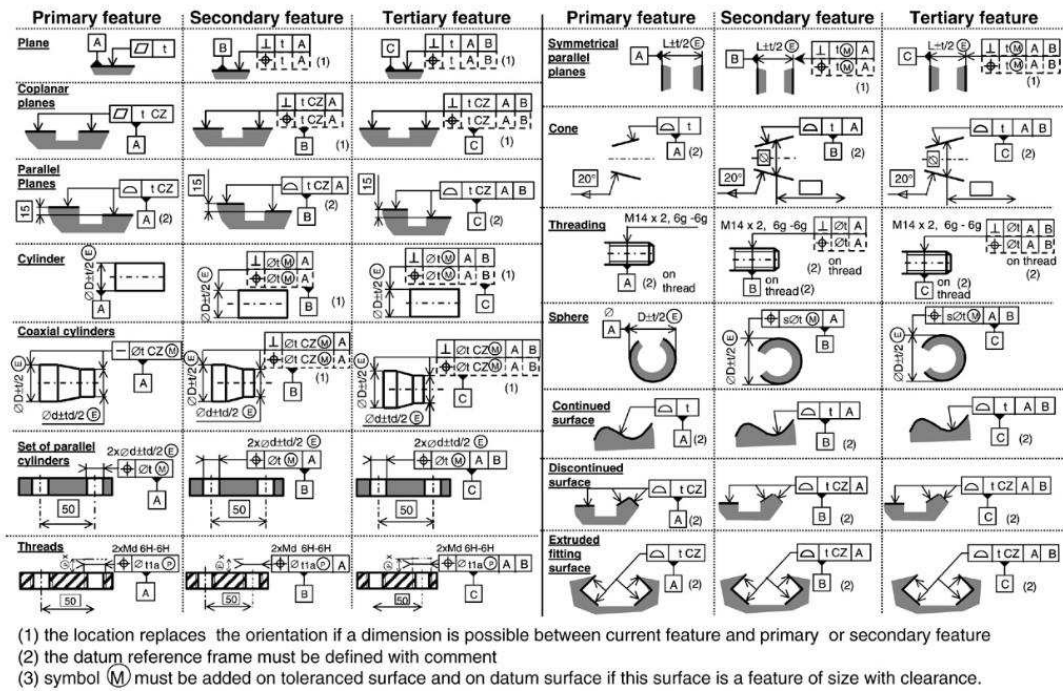


Fig. 1.17 – Cotation des surfaces de jonction [Anselmetti 06]

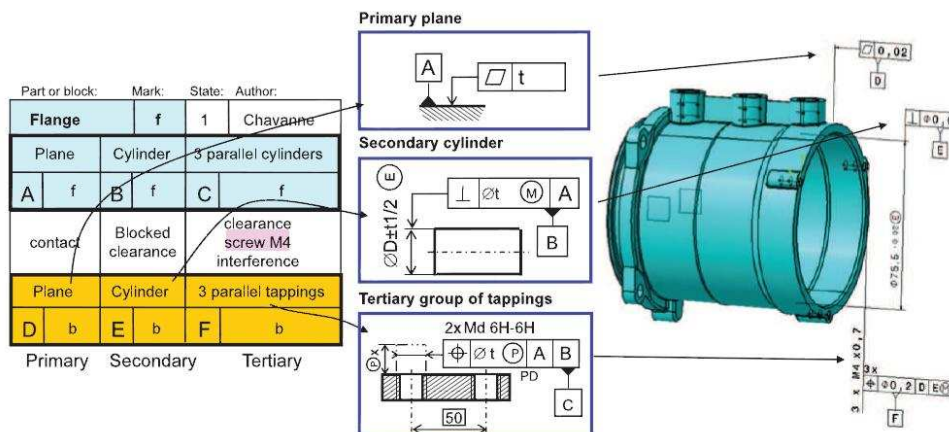


Fig. 1.18 – Processus de cotation des surfaces de jonction [Anselmetti 06]

### ▷ Synthèse de spécification

Une surface sur laquelle s'applique une exigence fonctionnelle sera appelée "surface terminale". La condition de respect des exigences fonctionnelles passe par l'ensemble des surfaces composant la boucle d'assemblage entre la base du mécanisme et la surface terminale. La boucle d'assemblage peut être différente en fonction des configurations de montage (fig. 1.19).

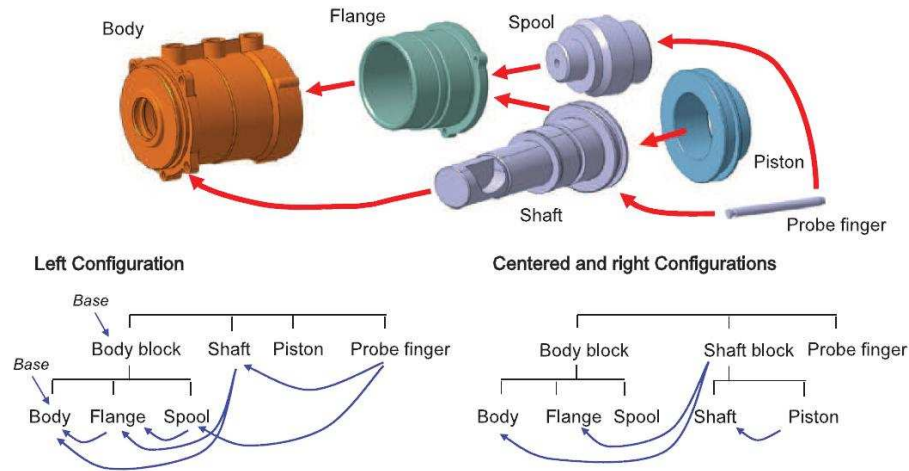


Fig. 1.19 – Boucles d'assemblage en fonction de la configuration de montage [Anselmetti 10b]

L'analyse des systèmes de référence permet d'identifier l'influence des paramètres géométriques de chacune de ces surfaces de liaison. Ainsi, Bernard Anselmetti [Anselmetti 06] définit un algorithme (fig. 1.20) permettant de générer la spécification complète des pièces du mécanisme pour chaque exigence fonctionnelle entre une surface terminale et la base de l'assemblage.

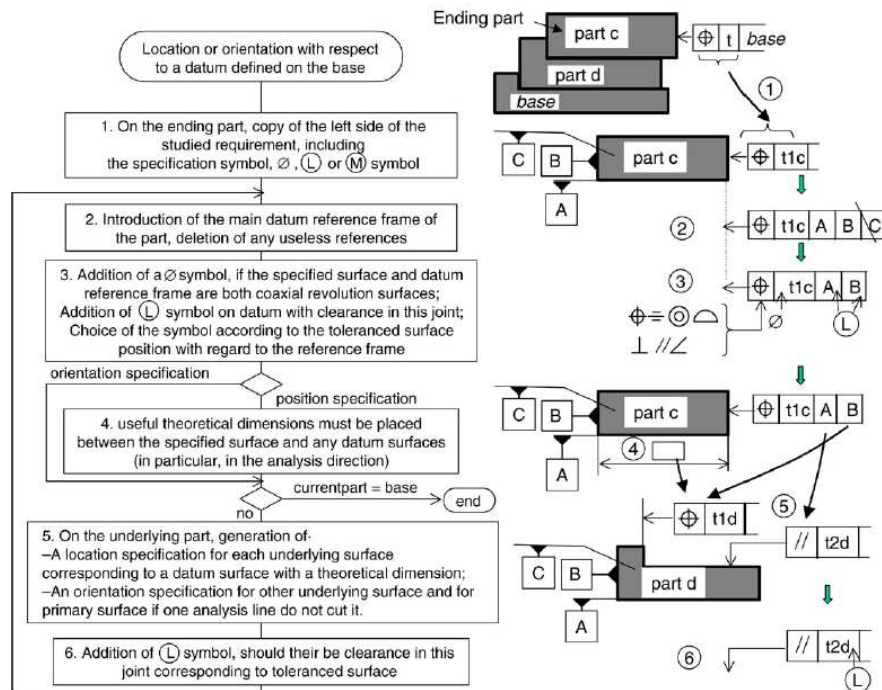


Fig. 1.20 – Algorithme de spécification [Anselmetti 06]



◇ **Tolérancement quantitatif** : Analyse des tolérances par la méthode des droites d'analyse.

Cette dernière étape consiste à contrôler le respect de l'exigence fonctionnelle géométrique en tout point de la surface terminale en fonction de la répartition des tolérances dans la boucle d'assemblage. Pour ce faire, Bernard Anselmetti a mis au point la méthode des droites d'analyse.

Une droite d'analyse est une droite de direction  $\vec{f}$  passant par un point d'analyse  $\mathbf{F}$ . Suivant la nature de la surface terminale sur laquelle s'applique l'exigence géométrique fonctionnelle, il fixe une droite ou un ensemble de droites d'analyse. Les points limitant le respect de l'exigence fonctionnelle se situent en périphérie de cette surface. Ils sont donc choisis parmi l'ensemble des sommets de la surface ou par discrétisation en un nombre raisonnable de points (en fonction de la précision souhaitée) d'un contour convexe de la surface (fig. 1.21). L'influence des défauts de forme et d'orientation de chaque surface composant la boucle d'assemblage est étudiée suivant la ou les directions d'analyse.

La méthode consiste à rechercher les points de contact au sein de chaque jonction pour exprimer le déplacement au pire des cas du point d'analyse  $\mathbf{F}$  de la surface terminale dans la direction  $\vec{f}$  de la droite d'analyse. Ce déplacement maximal doit être évalué dans toutes les directions significatives (fig. 1.21).

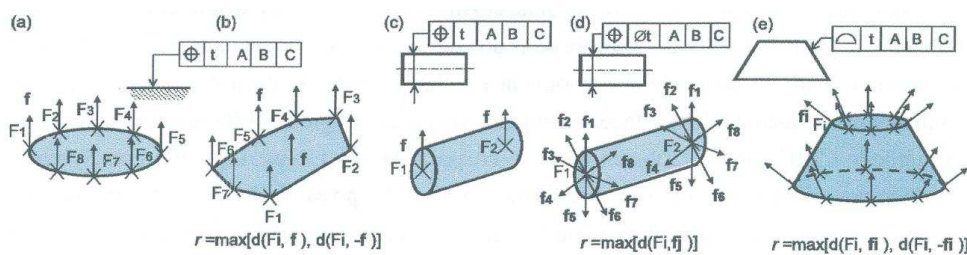


Fig. 1.21 – Points et directions d'analyse d'une surface terminale

La méthode utilise le concept fondamental de coefficient d'influence que nous retrouverons plus tard. Il fait l'hypothèse que le défaut total observé sur la surface terminale est égal à la somme des défauts de chaque jonction pondéré par un coefficient qu'il appelle "coefficient d'influence". Pour un mécanisme avec des liaisons en série, ceci s'observe de manière assez évidente en étudiant l'influence de chaque liaison une par une en considérant l'ensemble des autres sans défauts (fig. 1.22).

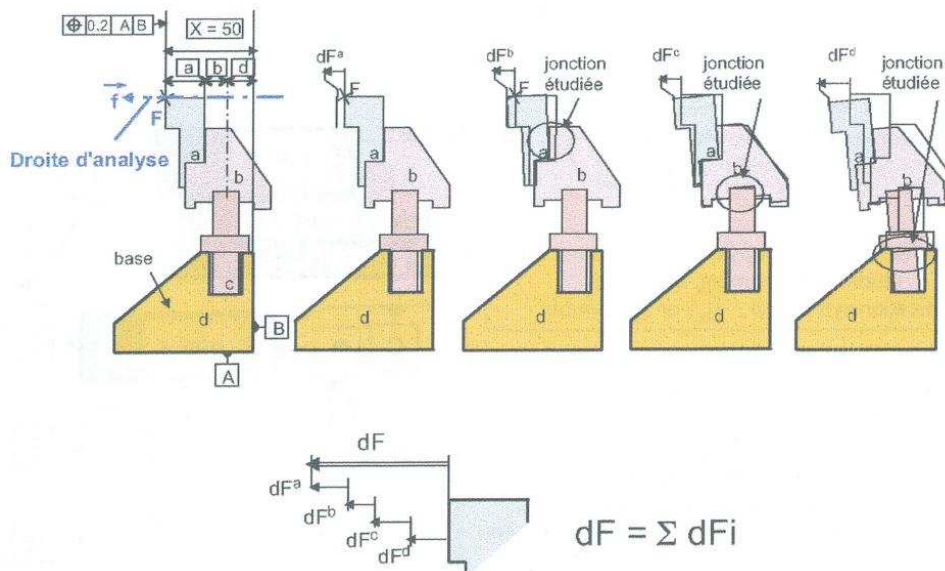


Fig. 1.22 – Assemblage en série étudié à l'aide de la méthode des droites d'analyse

Le calcul d'analyse nécessite de fixer les dimensions des éléments de liaison du mécanisme. Celles-ci sont donc définies au cas le plus défavorable en fonction de l'exigence fonctionnelle à respecter sur la surface terminale : au maximum de matière s'il s'agit d'une exigence de montabilité et au minimum de matière s'il s'agit d'une exigence de précision. Pour chaque jonction on cherche les points limitant le déplacement. Il s'agit des points de contact déterminant la situation au pire des cas. Ce concept permet d'obtenir la configuration la plus défavorable ainsi que l'influence des tolérances  $t_i$  de chaque surface "i" composant la boucle d'assemblage. On obtient ainsi un ensemble de relations linéaires reliant l'étendue de la tolérance fonctionnelle  $t_{C_f}$  à la tolérance  $t_i$  de chaque surface  $i$  du mécanisme (eqn. 1.10) :

$$t_{C_f} = \sum_{i=1} a_i * t_i \quad (1.10)$$

Suivant la répartition des tolérances, les points de contact peuvent varier. L'équation précédente n'est plus totalement linéaire, mais linéaire par morceaux en fonction des tolérances  $t_i$ . Ces relations permettent aussi d'effectuer un calcul probabiliste [Anselmetti 07] du respect de la condition fonctionnelle et ainsi optimiser la répartition des tolérances au sein du mécanisme.

Dans certains cas les surfaces de liaison composant les jonctions appartiennent à des pièces différentes. Ce type de montage est appelé assemblage avec branches en parallèle [Anselmetti 03a]. Dans cette configuration, le déplacement  $d(F, \vec{f})$  de la surface terminale suivant la droite d'analyse F dépend des déplacements des surfaces primaires P, secondaires S et tertiaires T (fig. 1.23). La relation fait intervenir deux nouvelles droites d'analyse  $d(S, \vec{s})$  et  $d(T, \vec{t})$  et devient (eqn. 1.11)

$$d(F, \vec{f}) = K_p * d(P, \vec{p}) + K_s * d(S, \vec{s}) + K_t * d(T, \vec{t}) \quad (1.11)$$

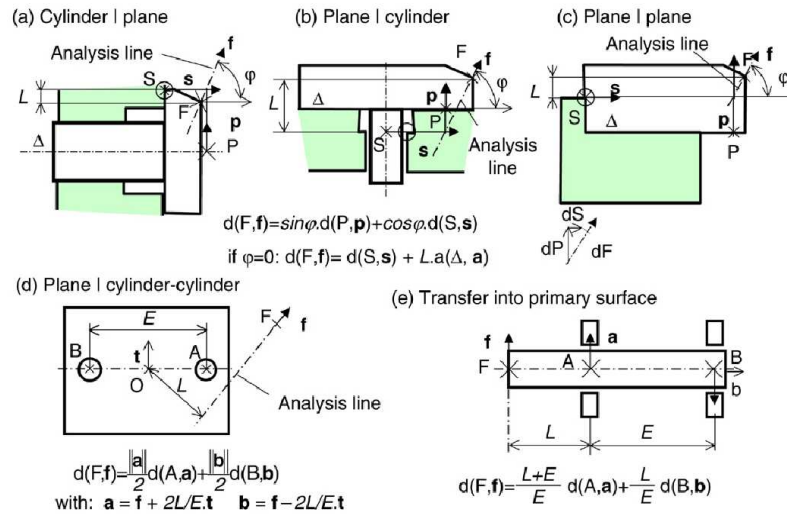


Fig. 1.23 – Relation de transfert dans les jonctions avec liaisons en parallèle [Anselmetti 06]

Des travaux de recherche récents permettent d'obtenir les relations de transfert pour des liaisons complexes [Chavanne 11b]. Robin Chavanne, par exemple, applique cette méthode au cas par cas sur des liaisons prismatiques [Chavanne 09a]. Il obtient ainsi les équations linéaires de tolérancement associées à chaque type de liaison. L'intégration de ces résultats et des règles de cotation permet, dans un environnement Excel®, de récupérer les informations des tableaux de mise en position par des tableurs et de générer le tolérancement et les calculs probabilistes d'optimisation à l'aide de macros.

Cette approche n'est pas sans rappeler la méthode utilisée dans le logiciel de Clozel (Mécamas-ter) [Clozel 07] sur des assemblages isostatiques. Toutefois ces résultats sont déterminés au cas par cas et se basent sur des règles métiers et ne résultent pas d'une modélisation générale.

## ◆ Quick GPS

La méthode "Quick GPS" se base sur les travaux de la méthode CLIC pour répondre à un besoin industriel spécifique [Chavanne 09b]. En bureau d'étude, il est courant de devoir concevoir une pièce isolée de son ensemble mécanique. Dans ce cas, les surfaces de contact avec les autres pièces sont connues et les exigences géométriques de montabilité et de précision sont reportées sur les surfaces de cette pièce isolée.

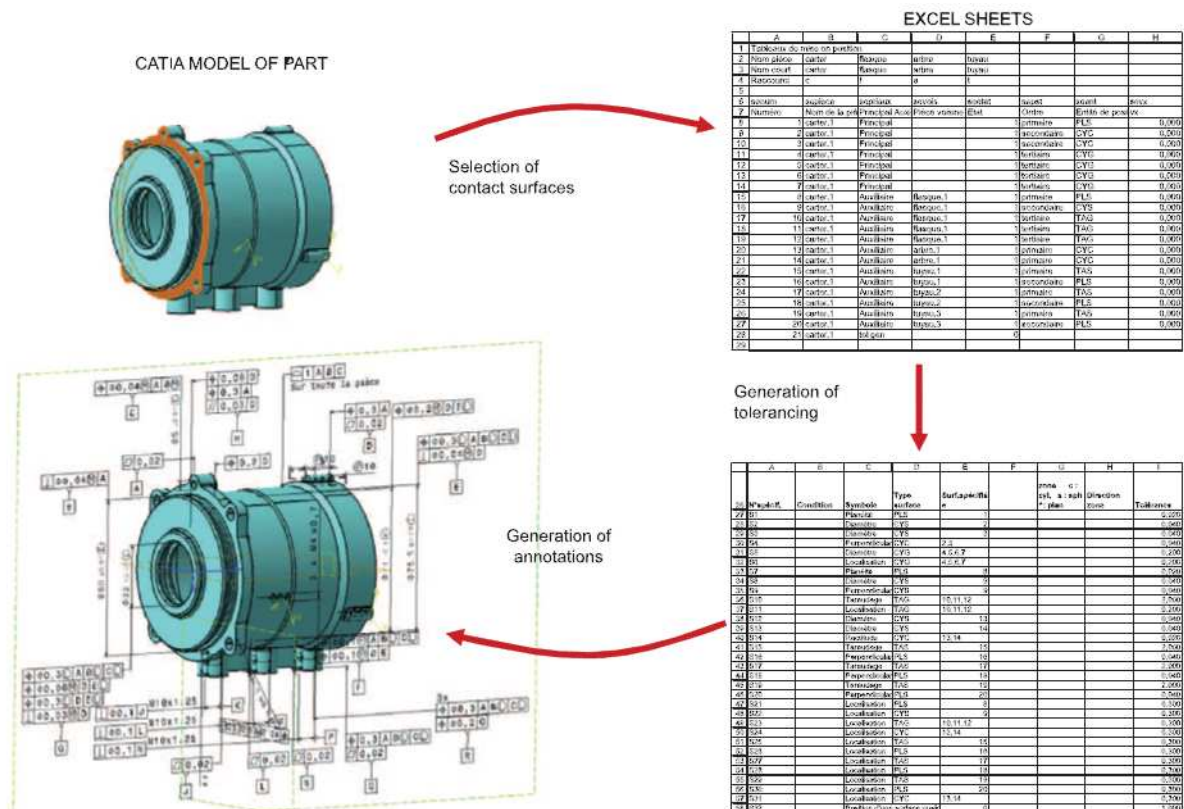


Fig. 1.24 – Processus de spécification suivant la méthode Quick GPS [Anselmetti 10b]

De la même manière que pour la méthode CLIC, le concepteur remplit des tableaux de mise en position pour chaque surface de liaison. A partir des données géométriques et de ces indications, la méthode Quick GPS se base sur des règles précises pour définir les systèmes de références et la spécification appropriée au besoin fonctionnel de la pièce (fig. 1.24).

La méthode Quick GPS génère automatiquement la spécification géométrique de la pièce dans un environnement 3D de la CAO (fig. 1.25). Ces résultats permettent de communiquer aux producteurs les défauts de fabrication acceptables ou peuvent être utilisés en analyse de tolérancement afin d'optimiser la répartition des tolérances.



L'hypothèse de non dépendance des limites des composantes de petits déplacements simplifie le calcul mais rend l'obtention de la relation liant les tolérances intermédiaires à la tolérance fonctionnelle impossible. L'optimisation de la chaîne de tolérances ne peut donc pas être faite de manière globale mais uniquement autour d'une configuration de répartition proposée par le concepteur.

### II.4.c Hyper-Espaces

Une façon simple de fixer les tolérances consiste à fixer des bornes (maxi et mini) sur les paramètres dimensionnels et linéaires de façon indépendante. La méthode des jacobiens torseurs avec intervalles s'en apparente dans la mesure où les composantes de torseurs d'écarts sont limitées de façon indépendante. Cependant, de manière générale les conditions fonctionnelles impliquent une limitation non indépendante de ces variables. On sera donc amené à définir des domaines dans des espaces à n-dimensions.

#### ◇ Tolérancement paramétrique et espace de faisabilité

Le tolérancement paramétrique définit des limites variationnelles sur les paramètres scalaires d'un modèle mécanique [Guilford 93].

J.U. Turner propose de convertir le modèle CAO en modèle variationnel [Turner 87]. Il décrit l'ensemble de la géométrie et de son tolérancement par des paramètres scalaires appelés *variables du modèle*  $M_i$  (fig. 1.26).

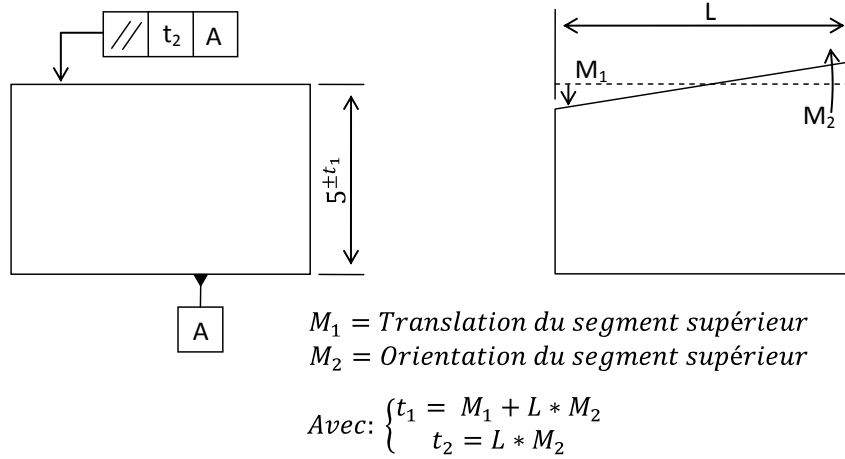


Fig. 1.26 – Conversion du modèle CAO en modèle variationnel

A chaque tolérance de localisation, d'orientation ou de forme correspond une *variable de tolérance*  $T_i$  avec ses limites associées. Les relations reliant ces *variables de tolérance*  $T_i$  aux *variables du modèle*  $M_i$  permettent de représenter le domaine de variation des  $M_i$  respectant le tolérancement. Ce domaine est appelé *Espace de Faisabilité* (fig. 1.27).

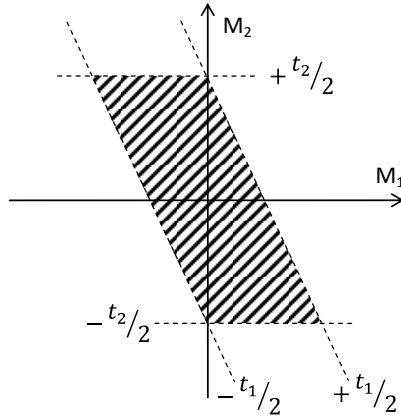


Fig. 1.27 – Espace de faisabilité

Cette représentation par espace de faisabilité présente plusieurs avantages. Elle renseigne le concepteur sur le respect de la condition fonctionnelle et contrôle la pertinence des tolérances par la détection d'éventuelles contraintes surabondantes [Turner 93]. Cependant, l'obtention des relations reliant les *variables de tolérance*  $T_i$  aux *variables du modèle*  $M_i$  par cette méthode est trop exigeante en capacité de calcul. D'autre part, la modélisation paramétrique présente certaines contraintes limitant le type de problèmes pouvant être traité. En effet, le modèle paramétrique localisera un alésage par ses coordonnées cartésiennes alors que le tolérancement de localisation peut définir une zone de tolérance cylindrique impossible à traduire par des bornes sur les paramètres de localisation (à moins d'un double paramétrage [Giordano 03b]).

#### ◇ UPEL

L'équipe de recherche du Laboratoire de Mécanique Physique de Bordeaux utilise une modélisation basée sur le concept du torseur de petits déplacements. Pour chaque surface de liaison, on identifie les petits déplacements autorisés par le tolérancement. En prenant en compte l'étendue de la surface, on calcule les domaines de variation de chacune des six composantes du torseur modélisant le défaut géométrique. La représentation de l'ensemble de ces 6 intervalles au point d'écriture du torseur de petits déplacements définit le concept d'**Union Pondérée d'Espace de Liberté** (**UPEL**) [Teissandier 99a].

De la même manière, les déplacements relatifs entre deux surfaces de liaison peuvent être représentés par un **UPEL**. Des méthodes de calcul et opérations spécifiques aux polytopes (union, intersection et sommes de *Minkowski*) permettent de déterminer l'**UPEL** définissant la position relative de 2 surfaces quelconques de l'assemblage [Teissandier 99b]. L'inclusion du polytope ainsi calculé dans le polytope associé à la condition fonctionnelle valide son respect.

#### ◇ Domaine

Max Giordano a défini très tôt l'outil domaine [Giordano 99]. Ce domaine modélise les petits déplacements possibles d'une entité géométrique à l'intérieur de son tolérancement ou de l'assemblage. Sa construction, sa représentation et son utilisation ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche afin d'être adaptées au mieux aux calculs de chaînes de cotes 3D.

Nous présenterons ces travaux plus en détail dans les chapitres suivants.

#### ◇ T-Maps<sup>®</sup>

Le modèle des *T-Maps*<sup>®</sup> développé par J.K. Davidson est un outil mathématique qui se base sur la théorie des barycentres pour modéliser le tolérancement de mécanismes tridimensionnels [Jian 01]. Ce modèle est assez proche de celui des domaines .

### ▷ Modélisation des défauts géométriques

Un assemblage mécanique est composé de surfaces de liaison présentant des défauts géométriques. Les défauts admissibles sont limités par une zone de tolérance. Le *T-Maps*<sup>®</sup> représente l'ensemble des configurations de position et d'orientation d'une entité géométrique à l'intérieur de sa zone de tolérance [Davidson 03]. En fonction de la topologie de la surface et du type de tolérance associée, on identifie les paramètres de l'entité géométrique ainsi que les petits déplacements (translations et rotations) la laissant invariante. Le *T-Maps*<sup>®</sup> sera décrit dans un espace Euclidien dont les dimensions correspondent aux degrés de liberté autorisés par la zone de tolérance.

Dans le cas d'une zone de tolérance cylindrique (fig. 1.28), l'écart de l'axe tolérancé est défini par 4 paramètres (2 rotations et 2 translations) [Ameta 07c]. Les deux derniers petits déplacements (translation et rotation autour de son axe propre) le laissent invariant.

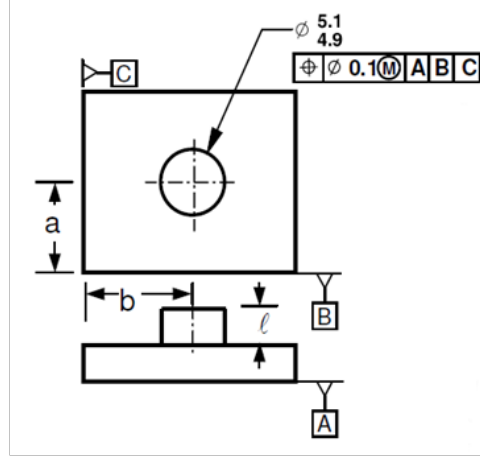
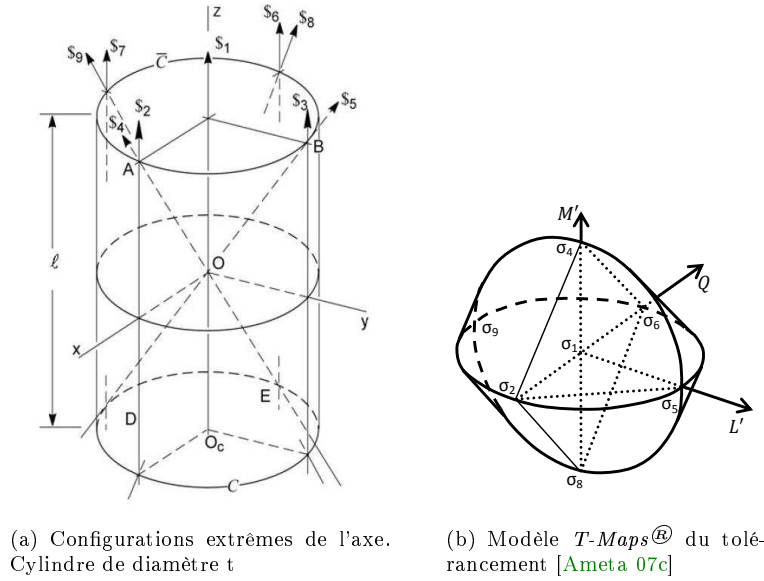


Fig. 1.28 – Tolérancement d'un axe par une zone de tolérance cylindrique [Singh 09]

Le  $T\text{-Maps}^{\text{®}}$  associé à ce tolérancement est défini dans un espace à 4 dimensions. De par la théorie barycentrique, 5 points de base sont donc nécessaires pour le définir entièrement [Coxeter 69]. Ces 5 points de base  $\sigma_i$  correspondent respectivement aux 5 configurations caractéristiques  $\$i$  de l'axe tolérancé dans sa zone de tolérance (fig. 1.29(a)). Les points de bases  $\sigma_i$  définissent des vecteurs formant une base orthonormée d'origine  $\sigma_1$  (correspondant à la configuration nominale  $\$1$ ). Les 4 autres points de bases ( $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ ) sont placés à une distance  $\frac{t}{2}$  de  $\sigma_1$  (avec  $t$  la valeur de la tolérance de localisation) (fig. 1.29(b)).

Fig. 1.29 – Configurations limites et modèle  $T\text{-Maps}^{\text{®}}$  du tolérancement d'un axe dans la condition dimensionnelle au maximum de matière (avec  $t$ =valeur de la tolérance de localisation)

Ainsi chaque configuration  $\$$  de l'axe dans sa zone de tolérance est définie comme le barycentre des 5 points de base auxquels sont associés des coefficients de pondération  $\lambda_i$  (coordonnée de la configuration) (eqn. 1.13).

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) * \vec{OP} = \lambda_1 * \vec{O\sigma_1} + \lambda_2 * \vec{O\sigma_2} + \lambda_3 * \vec{O\sigma_3} + \lambda_4 * \vec{O\sigma_4} \quad \text{avec } \lambda_i \in [0, 1] \quad (1.13)$$

Le  $T\text{-Maps}^{\text{®}}$  est entièrement décrit en parcourant l'ensemble des configurations de l'axe à l'intérieur de sa zone de tolérance. Une disposition "intelligente" des points de base permet de faciliter l'interprétation du  $T\text{-Maps}^{\text{®}}$ . De nombreuses études ont été menées afin de définir le  $T\text{-Maps}^{\text{®}}$  de différentes topologies et entités géométriques : axes [Bhide 05], surfaces circulaires [Davidson 02b] [Clasen 09], surfaces rectangulaires [Mujezinovic 01], surfaces polygonales [Mujezinovic 04], groupe point-droite [Ameta 07b], liaison hélicoïdale [Davidson 02a], profils linéaires [Davidson 11], etc... Dans le cas d'une surface cylindrique, une projection dans une espace à 3 dimensions (1 translation et 2 rotations) est illustrée en figure (fig. 1.29(b)).

Un des grands avantages de ce modèle est qu'il permet de modéliser également les modificateurs [Ameta 10b] tels que le maximum de matière (fig. 1.30). Ceci est rendu possible en ajoutant, au modèle précédent, une dimension correspondant à la variation dimensionnelle sur laquelle s'applique le modificateur. La figure (fig. 1.30) illustre le  $T\text{-Maps}^{\text{®}}$  du tolérancement au maximum de matière avec  $t_{\phi}$  la tolérance dimensionnelle sur le diamètre du bossage.

De la même manière que pour les écarts géométriques dans leur zone de tolérance associée, les  $T\text{-Maps}^{\text{®}}$  peuvent modéliser les petits déplacements autorisés au sein d'une liaison (jeux) en fonction des dimensions géométriques [Ameta 10a].

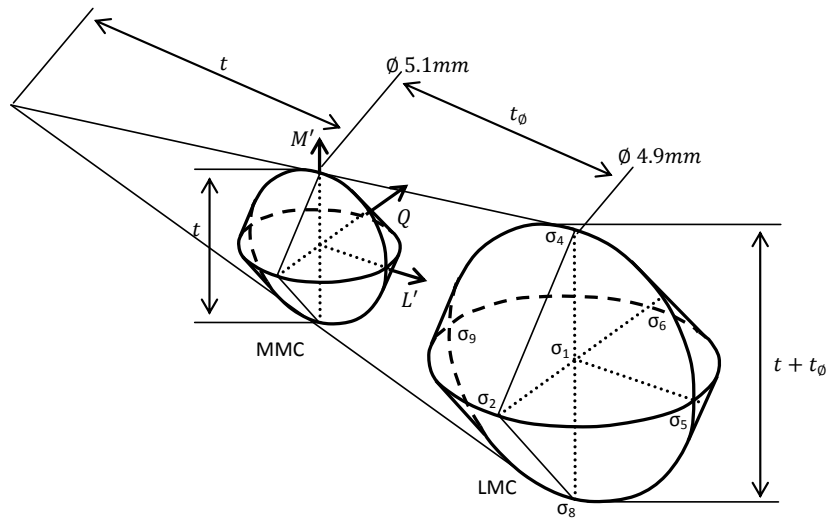


Fig. 1.30 – Projection du modèle  $T\text{-maps}^{\text{®}}$  avec modificateur au maximum de matière

### ▷ Modélisation de l'assemblage

Les opérations spécifiques aux polytopes permettent de résoudre un grand nombre de problèmes de tolérancement tridimensionnel avec cette représentation [Ameta 11]. L'ensemble des positions relatives de deux surfaces, autorisé par les jeux et le tolérancement, peut se modéliser sous forme de  $T\text{-maps}^{\text{®}}$ . Il s'agit du  $T\text{-maps}^{\text{®}}$  somme de Minkowski de l'ensemble des  $T\text{-maps}^{\text{®}}$  modélisant les liaisons (jeux et écarts géométriques) constituant la boucle d'assemblage entre les deux surfaces étudiées [Wu 03].

Si ce  $T\text{-maps}^{\text{®}}$  somme de Minkowski est inclus dans le polytope modélisant la condition fonctionnelle alors celle-ci est vérifiée.



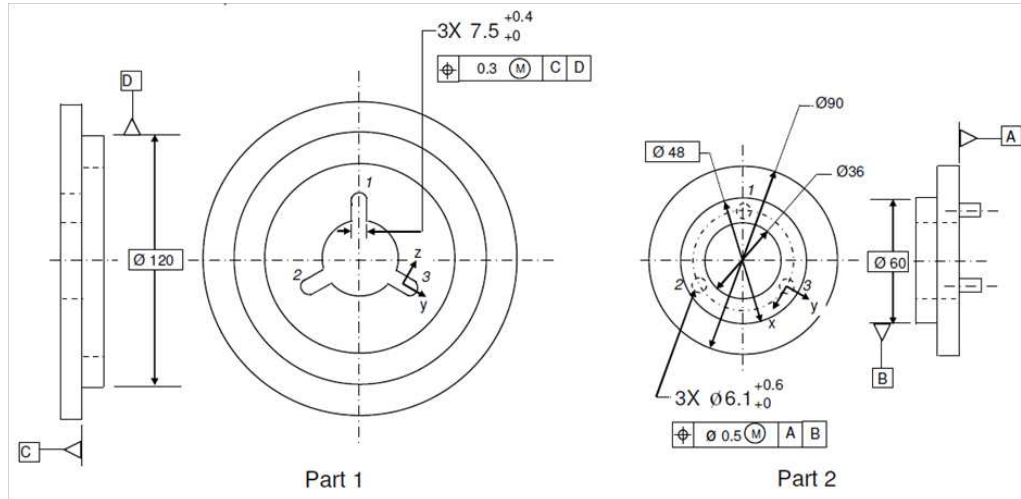


Fig. 1.31 – Assemblage auto-centreur [Singh 09]

Dans le cas de liaisons en parallèle, le mouvement global autorisé par la liaison est obtenu en sommant les déplacements du centre de la liaison, générés par les mouvements de chaque branche prise individuellement, en considérant la position des autres au nominal. Dans le cas d'un assemblage réalisé par 3 pions dans des rainures disposées à  $120^\circ$  (fig. 1.31), le mouvement de la pièce 1 par rapport à la pièce 2 est obtenu en faisant la somme de *Minkowski* des déplacements générés par les mouvements possibles de chaque centre des pions lorsque les autres restent centrés (fig. 1.33(a)). On obtient ainsi le *T-maps*<sup>®</sup> modélisant les mouvements relatifs de la pièce 1 par rapport à la pièce 2 (fig. 1.33(b)).

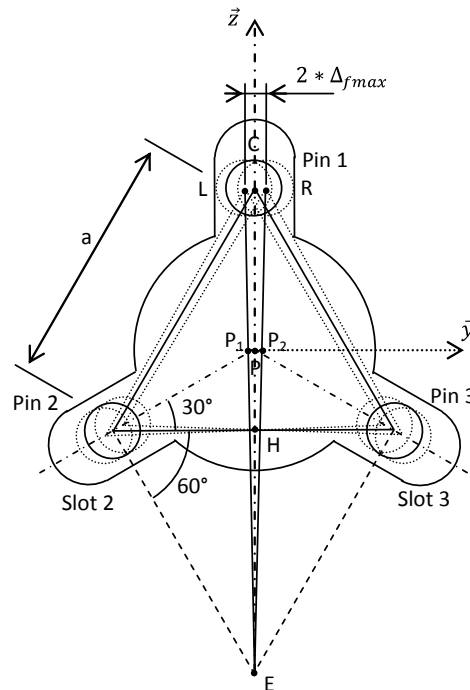


Fig. 1.32 – Schématisation géométrique de l'assemblage auto-centreur

En considérant  $t_{in}$  et  $\tau_{in}$  les tolérances de localisation et de dimension de la pièce 1 et  $t_{ex}$  et  $\tau_{ex}$  les tolérances de localisation et de dimension de la pièce 2, on obtient la valeur de la tolérance fonctionnelle  $t_f$  de décentrage du point P, centre de la pièce 2, par rapport au centre de la pièce 1 (eqn. 1.14).

$$t_f = 2 * P_1 P_2 = \frac{8 * \Delta_{fmax}}{3} = \frac{8}{3} * (t_{ex} + \tau_{ex} + t_{in} + \tau_{in}) \quad (1.14)$$

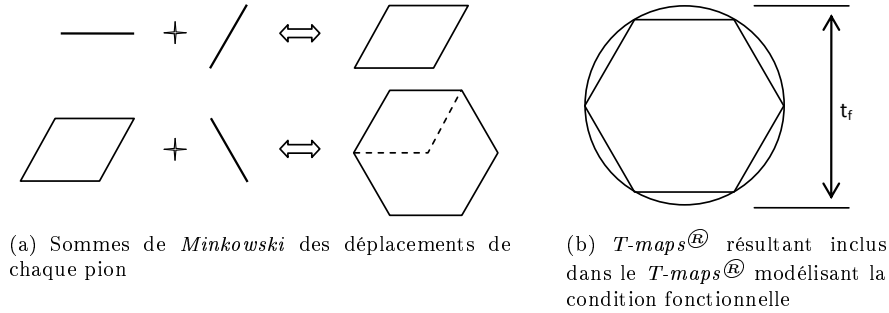


Fig. 1.33 – Obtention du *T-maps*® modélisant les mouvements relatifs entre les pièces 1 et 2

La méthode des *T-maps*® permet d'obtenir l'influence du tolérancement des surfaces de liaison sur le respect de la tolérance fonctionnelle. Ces relations sont linéaires et on retrouve le concept de coefficient d'influence [Jian 05]. Le problème de tolérancement peut ensuite être traité au pire des cas ou de manière statistique [Shah 07, Ameta 07a]. Nous verrons plus tard (cf. chapitre 4) que cette méthode nécessite que l'assemblage ne présente pas de degrés d'hyperstatisme.

## II.5 Synthèse des méthodes d'assistance au tolérancement présentées

Il est impossible de classer l'ensemble des méthodes de tolérancement indépendamment les unes des autres. Certaines se basent sur des concepts ou hypothèses équivalentes pour résoudre différentes problématiques de tolérancement (tab. 1.2). En effet, la plupart des avancées significatives dans le domaine s'inspirent de méthodes existantes pour aller plus loin et proposer de nouvelles réponses. Le classement choisi précédemment pour les présenter est évidemment discutable. Mais il correspond à la manière dont nous avons abordé la résolution des problèmes de tolérancement tridimensionnel avec l'outil "*domaines*" développé au sein du laboratoire **SYMME** (**SY**stème et **Mat**ériaux pour la **MÉ**catronique).

	Modélisation de la géométrie tolérancée	Tolérancement qualitatif	Prise en compte de l'assemblage	Prise en compte des tolérances
Tolérancement variationnel	X			
Tolérancement vectoriel	X			
Tolérancement cinématique	X			
Tolérancement paramétrique	X		X	
$\Delta_{tol}$	X		X	
Méthode CLIC	X	X	X	X
Jacobian Torseur	X		X	X
<i>T-maps</i> ®	X		X	X

Table 1.2 – Synthèse des méthodes d'assistance au tolérancement

Chaque méthode présentée ci-dessus permet de répondre plus ou moins partiellement à l'ensemble des problèmes de tolérancement. La méthode **CLIC** développée par Bernard Anselmetti est l'une des

plus aboutie sur le sujet, actuellement. En effet, elle prétend apporter une réponse à toutes les étapes du tolérancement d'un mécanisme tridimensionnel en bureau d'étude. Cependant, elle se base sur des règles qui, par définition, rendent impossible sa généralisation. Toute nouvelle topologie d'assemblage doit faire l'objet d'une étude approfondie pour être prise en compte par la méthode *CLIC*. Aujourd'hui, la méthode *CLIC* peut traiter la quasi totalité des cas rencontrés couramment dans l'industrie. Ceci a été rendu possible par un travail considérable effectué depuis de nombreuses années au sein du Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée (**LURPA**) de l'ENS de Cachan et grâce à une méthode de calcul originale : la méthode des "droites d'analyse". Cependant cette technique nécessite une certaine expertise pour s'assurer que l'ensemble des directions d'analyse significatives ont été étudiées.

Sur des liaisons basiques, nous soulignerons l'équivalence qu'il existe entre les différents types de configurations et les entités géométriques (sommets, arêtes et faces) des polytopes modélisant le tolérancement. L'avantage de ces polytopes est qu'ils peuvent être obtenus automatiquement avec l'assurance de modéliser l'ensemble des directions caractéristiques. Nous avons vu que les *T-maps*<sup>®</sup> nécessitaient également une certaine connaissance de la part de l'utilisateur, mais cela influe uniquement sur la facilité d'interprétation de la modélisation. Nous verrons que la construction des "*domaines*" défini par Max Giordano [Giordano 99] se fait de manière totalement systématique et sans oubli possible.

La modélisation par *T-maps*<sup>®</sup> permet de prendre en compte les modificateurs de tolérance tels que le maximum de matière. La méthode *CLIC* utilise une modélisation au maximum ou au minimum de matière (suivant l'exigence fonctionnelle à contrôler). Cette modélisation permet de simplifier le calcul d'obtention du système d'inéquations linéaires de tolérance. Mais rend difficile la prise en compte des variables aléatoires dimensionnelles dans l'étude statistique du respect de la condition fonctionnelle. Dans le modèle "*domaine*", ces dimensions sont des paramètres pouvant être pris en compte comme toute autre variable aléatoire.

La résolution des assemblages avec liaisons en parallèles reste problématique. De nombreux cas d'étude simplifient ce type de liaison en liaison simple afin de se ramener à un cas d'empilage en série. La méthode *CLIC* découple l'influence des surfaces primaires, secondaires et tertiaires afin de simplifier le calcul. Le modèle des *T-maps*<sup>®</sup> propose de modéliser les mouvements autorisés par la liaison en faisant la somme de *Minkowski* des mouvements possibles dans chaque branche parallèle. Nous verrons que ce type de problème peut être traité par les opérations spécifiques aux polytopes (union, intersection). Une représentation adéquate des "*domaines*" qui sera présenté par la suite (cf. chapitre 4) permet de rendre ces opérations moins coûteuses en temps de calcul.

### III Logiciels d'assistance au tolérancement

La finalité de toutes ces méthodes d'assistance au tolérancement est de permettre l'optimisation des tolérances et la définition de la géométrie cible de tout mécanisme tridimensionnel à partir de la connaissance de ces exigences fonctionnelles. Afin que cette optimisation soit possible dès le début et à tout moment de la chaîne numérique, il semble indispensable, aujourd'hui, qu'elle s'effectue à partir des données fournies par le modèle numérique défini en bureau d'étude. C'est pourquoi de nombreux logiciels ou de modules intégrés aux logiciels de CFAO ont été élaborés. Même si certains sont très aboutis, aucun, à notre connaissance, n'apporte de réponse complète et pleinement satisfaisante à toutes les problématiques imposées par le tolérancement.

A ce jour, on peut distinguer différentes familles d'applications ou de modules directement développés par les éditeurs de logiciel de CFAO d'aide au tolérancement :

- Les logiciels d'analyse de tolérancement : qui se basent sur des méthodes de calcul statistiques afin de donner un taux de respect des exigences fonctionnelles en fonction des données géométrique de l'assemblage et d'un tolérancement fixé.
- Les logiciels d'assistance à la spécification : qui proposent et vérifient le type de spécification géométrique choisie par le concepteur en fonction des données géométriques et de la norme en vigueur.
- Les logiciels d'assistance à la synthèse de tolérancement : qui se basent sur des outils et modèles mathématiques fiables afin de simuler et optimiser les choix géométriques fait par le concepteur.

### III.1 Logiciels d'assistance à l'analyse de tolérances

Même si certains proposent aussi des résultats au pire des cas (*VSA*® ou *Mech. Advantage*®), l'intérêt de ce type de logiciels réside dans leur analyse statistique des tolérances. Même si ces méthodes ne garantissent plus l'interchangeabilité de la totalité des pièces produites, elles permettent tout de même de réduire de manière significative les coûts de fabrication. En effet, elles permettent d'élargir les intervalles de tolérance tout en contrôlant le pourcentage de pièces ne respectant pas les exigences fonctionnelles (taux de rebuts).

Des logiciels tels que *eM-Tol-Mate*® [Technomatix], *Tolérance Manager*® ou *CETOL 6σ*® [Sigmetrix] proposent un module d'assistance à l'analyse statistique de tolérances compatible avec des modeleurs CAO existants tels que *CATIA*® [Dassault Systems] et *Pro/Engineer*®. Ce type de logiciels se base sur les données géométriques fournies par le modèle numérique. À partir de ces informations, ils définissent un schéma d'assemblage et simulent les variations de la géométrie des pièces par tirage de Monte-Carlo des défauts admissibles par le tolérancement. On peut ainsi déterminer les cotes critiques et optimiser quantitativement les valeurs des tolérances.

Le logiciel *CETOL 6σ*® de chez Sigmetrix prend en compte, non seulement les exigences de qualité du produit mais également les capacités des procédés de fabrication. Cette option très utile pour vérifier la faisabilité d'un assemblage en fonction des moyens de production à disposition, nécessite cependant une connaissance précise des capacités des machines utilisées dans le processus de fabrication, ce qui est malheureusement rarement le cas.

Le logiciel *eM-Tol-Mate*® de chez Technomatix propose, en plus de l'analyse statistique des tolérances mises en place, une fonction de visualisation des tolérances sous forme de calibres virtuels ainsi qu'une fonction de vérification de la cohérence de la cotation fonctionnelle définie par le concepteur. *Tolérance Manager*® propose également une fonction d'assistance à la spécification au concepteur.

Ces logiciels exploitent le modelleur paramétrique pour étudier l'influence des variations des paramètres indépendants  $x_k$  sur le paramètre fonctionnelle  $y = f(x_k)$ . Par contre ces logiciels ont des difficultés à faire intervenir la notion de zone de tolérances conforme à la norme et plus proche des conditions fonctionnelles.

### III.2 Logiciel d'assistance à la spécification

Aujourd'hui, face à l'importance de l'opération de tolérancement d'un produit dans son cycle d'élaboration et à la demande des utilisateurs, la plupart des modeleurs CAO proposent une application d'assistance à la spécification géométrique en accord avec la norme ISO en vigueur. Ceci a été rendu possible notamment grâce à la normalisation de l'écriture des spécifications géométriques dans un univers tridimensionnel.

*CATIA*® [Dassault Systems] s'est doté d'un module d'aide au tolérancement appelé FTA (Functional Tolerancing & Annotation) permettant d'analyser la sémantique du tolérancement [Gaunet 01]. Ce module modélise les surfaces fonctionnelles de l'ensemble du mécanisme à l'aide du modèle des SATT. Ainsi, il définit les contraintes de position relative entre la surface tolérancée et sa surface de référence ou le système de référence associé. Une boîte de dialogue propose au concepteur un ensemble de typologies de spécification et de modificateurs en accord avec la surface sélectionnée et la norme.

Les travaux de Gaëtan Legrais [Legrais 05] ont permis d'intégrer ce même type de logiciel au sein du modelleur CAO *TopSolid*® développé par Missler Software. Ce module d'assistance au tolérancement s'appuie sur l'étude du degré d'hyperstatisme du mécanisme pour conseiller et vérifier la cohérence du système de spécification défini par le concepteur. Il conseille l'utilisateur en lui proposant un panel de spécifications, limité à celles en accord avec la géométrie et la normalisation pour chaque surface tolérancée. Il assiste également le concepteur dans la définition du système de référence. En se basant sur l'étude des degrés de liberté autorisés par chaque surface composant le système de référence, ainsi que les contraintes de positions relatives entre elle, il vérifie la cohérence et oriente les choix du concepteur. Ce module permet également de récupérer le tolérancement tridimensionnel lors de la mise en plan 2D. Ce qui représente un gain de temps considérable.

### III.3 Logiciels d'assistance à la synthèse de tolérances

*MecaMaster*<sup>®</sup> et *AnaTol*<sup>®</sup> proposent d'évaluer, dès le début du cycle de conception d'un produit, la sensibilité des liaisons du mécanisme vis-à-vis des exigences fonctionnelles définies.

En effet, *MecaMaster*<sup>®</sup> propose de modéliser les jonctions par un ensemble de contacts ponctuels formant une liaison isostatique. Ce modèle exige une certaine expertise de la part du concepteur pour définir judicieusement les points de contact significatifs. Mais il permet d'effectuer l'étude sur un modèle filaire de l'assemblage. Cette étude peut donc être menée dès la phase d'avant projet afin d'effectuer les optimisations géométriques adéquates [Clozel 07]. Une simulation cinématique des petits déplacements de chaque point de contact (les petits déplacements représentant les écarts ou jeux géométriques au sein de la liaison) permet de connaître l'influence de chaque tolérance locale sur la tolérance fonctionnelle globale. *MecaMaster*<sup>®</sup> peut mener cette étude au pire des cas ou en statistique.

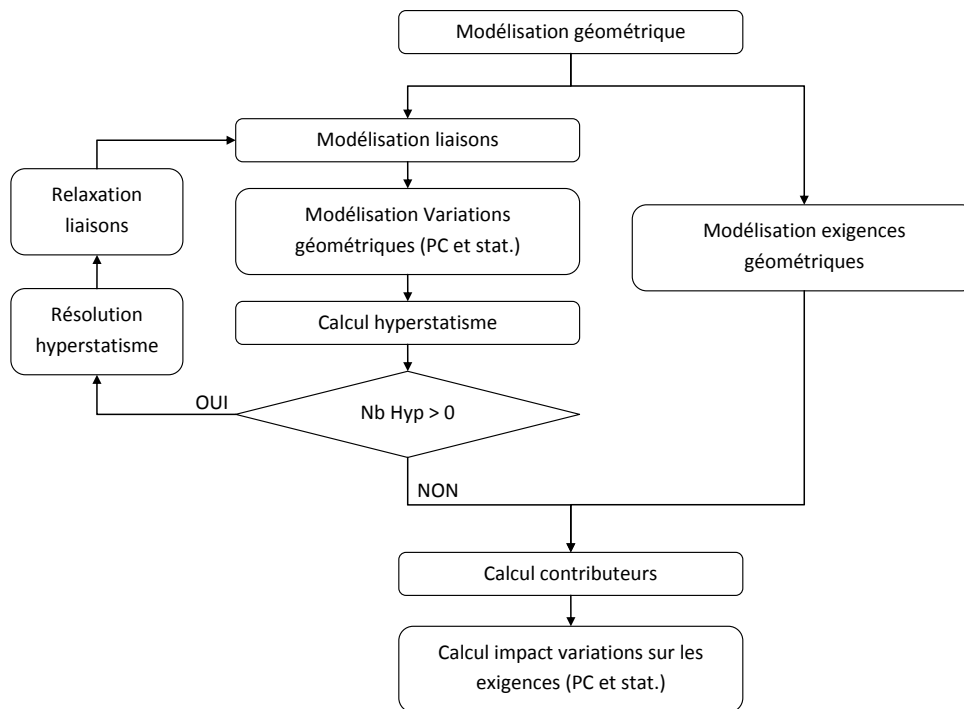


Fig. 1.34 – Synoptique de fonctionnement *AnaTol*<sup>®</sup> [Mounaud 09]

Le logiciel *AnaTol*<sup>®</sup> pour (ANALYse des TOLerances) développé par EADS utilise un concept assez proche. Cet outil s'appuie sur les travaux de thèse de B. Marguet [Marguet 01]. Il décrit le mécanisme à l'aide du modèle des SATT [Clément 91]. Puis se base sur la méthode des torseurs de petits déplacements et sur la résolution du problème de propagation des défauts géométriques dans un assemblage [Bourdet 95a, Bourdet 95b] pour évaluer la sensibilité géométrique de chaque surface de liaison d'un mécanisme vis-à-vis de l'exigence fonctionnelle.

La première étape de cette méthode consiste à modéliser les liaisons et évaluer le degré d'hyperstatisme des différentes boucles d'assemblage. Le concepteur doit ensuite relâcher certaines contraintes afin de revenir à un assemblage isostatique. Enfin, la contribution de chaque surface de liaison par rapport à l'exigence fonctionnelle est évaluée (fig. 1.34). Les relations ainsi obtenues permettent de faire une analyse au pire des cas ou statistique de l'influence des variations géométriques sur le respect des exigences fonctionnelles.

L'utilisation de ces deux logiciels est très intéressante durant les phases d'avant projet pour définir et optimiser au plus tôt la géométrie de l'assemblage. Ceci est rendu possible par l'application de la méthode

sur un modèle simpliste de l'assemblage de type "squelette" (fig. 1.35). Cependant la généralisation de leur utilisation aux autres phases de conception reste problématique.

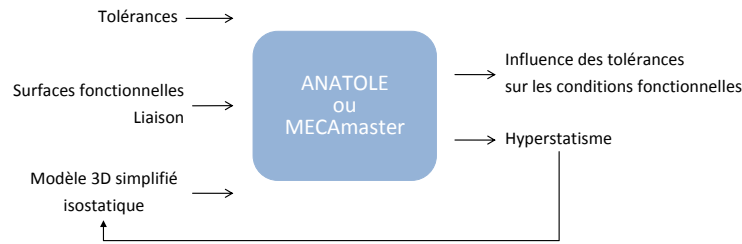


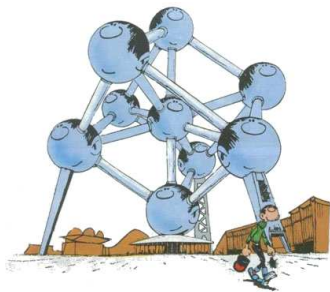
Fig. 1.35 – Entrées/Sorties *AnaTole*<sup>®</sup> et *MECAMaster*<sup>®</sup> [Chavanne 11a]

*Enventive*<sup>®</sup> propose également d'étudier l'impact des variations géométriques des pièces composant un mécanisme dès le début du cycle de conception. L'assemblage est modélisé sous forme filaire. Différents paramètres sont affectés à chaque pièce et surface de liaison. Les paramètres relatifs aux surfaces tolérancées sont définis comme des variables aléatoires avec leurs paramètres statistiques associés. Le tirage de type Monte-Carlo de ces variables aléatoires permet de mesurer les paramètres géométriques associés aux exigences fonctionnelles. Et ainsi établir l'influence de chaque paramètre tolérancé sur chaque condition fonctionnelle.

Les performances de ce logiciel indépendant (non intégré dans un modelleur CAO) ont été remarquées par *Schneider Electric*. En effet, des travaux d'analyse comparative de différents logiciels d'assistance au tolérancement sur un ensemble de mécanismes plans (de type disjoncteur électrique) plus ou moins complexes ont souligné les bons résultats obtenus avec *Enventive*<sup>®</sup>.

La méthode *Quick GPS* qui se base sur la méthode CLIC présentée précédemment (cf. § II.4.a) permet également d'apporter une assistance numérique au tolérancement. Par le biais d'un tableur renseigné par le concepteur, la méthode *Quick GPS* propose des solutions de spécification, d'analyse et de synthèse de tolérances.





– Atomium de Gaston<sup>™</sup> by Franquin

### Objectifs

*Ce second chapitre introduit la méthode développée au sein du laboratoire SYMME afin de contribuer à l'assistance au tolérancement des assemblages tridimensionnels. Cette méthode se base sur une modélisation des variations géométriques à l'aide d'objets définis dans l'espace des déplacements, appelés "domaines". Ces domaines sont des polytopes convexes (ou sont facétisés sous forme de polytopes) équivalents à un ensemble fini. Ce modèle s'appuie sur des outils géométriques de base qui seront présentés dans une première partie. Ensuite, nous aborderons les techniques de modélisation des différentes entités géométriques. Et pour finir, nous verrons comment tout cela est pris en compte dans un assemblage tridimensionnel.*

## Introduction

Dès le début des années 1990, Max Giordano et Daniel Duret introduisent le concept de la méthode des "Domaines" [Duret 93]. Cet outil permet de modéliser les petites variations géométriques et de faire l'analyse ou la synthèse de tolérances de mécanismes tridimensionnels [Giordano 09].

En effet, il devient possible de traduire les problèmes de tolérancement sous la forme de système d'équations et d'inéquations reliant des domaines. Ainsi la résolution, passe par une manipulation de domaines plus adaptés à ce type de problème que de simples scalaires [Giordano 03a].

La modélisation par les domaines se base sur un outil largement répandu dans le domaine de la mécanique : Le torseur des petits déplacements.

## I Torseurs petits déplacements

Le torseur des petits déplacements a été développé dans les années 1970 par Pierre Bourdet et André Clément [Bourdet 95b] afin de résoudre des problèmes de métrologie. Il permettait d'ajuster un modèle de surface géométrique à un nuage de points issu de la mesure [Bourdet 76]. L'efficacité et la simplicité de ce concept lui ont permis de s'imposer dans de nombreux domaines (machines à mesures tridimensionnelles, simulation cinématique des mécanismes avec défauts, transfert de tolérance en fabrication [BUI 11], ...).



Cette modélisation consiste à linéariser les petits déplacements et petites rotations exprimant la variation de position d'une entité géométrique (cf. § II.3.d). On se place donc dans les conditions suivantes :

- *Hypothèse de petits déplacements* : Les déplacements et les rotations seront supposés d'assez faible amplitude afin que l'erreur introduite par linéarisation soit négligeable.
- *Mouvements de solides rigides* : Afin de retrouver la relation de Varignon, il est nécessaire de considérer que les solides sont indéformables.

## I.1 Champs de déplacements des points appartenant à un solide rigide en mouvement dans un référentiel donné

Soit un solide rigide  $S$  en mouvement dans un référentiel donné entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ . Son déplacement est caractérisé par une transformation linéaire composée d'une translation et d'une rotation. Sa position à l'instant  $t_0$  est définie par le repère  $R_0 = (O_0, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ . De même, sa position à l'instant  $t_1$  est définie par le repère  $R_1 = (O_1, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$  (fig. B.1).

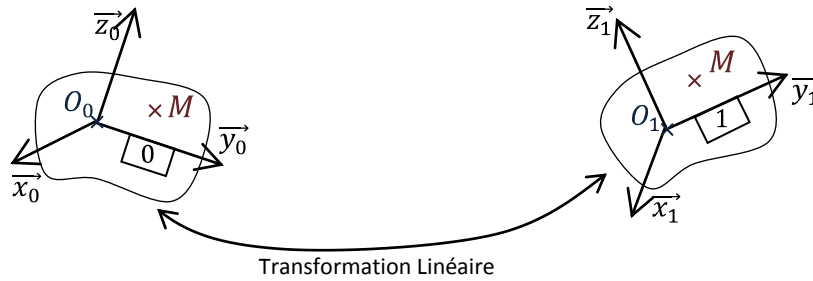


Fig. 2.2 – Déplacement d'un point  $M$  quelconque appartenant à un solide  $S$  indéformable

Dans les hypothèses de petits déplacements de solides rigides, la variation de position d'un repère par rapport à un autre peut être modélisée sous forme d'un torseur de petits déplacements  $\{D(M)\}_{b_0}$  (cf. annexe B) écrit au point  $M$  dans la base  $b_0$ , de résultante le vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  et de moment le vecteur translation  $\vec{\delta}$  (eqn. B.15) :

$$\{D(M)\}_{b_0} = \left\{ \begin{array}{c|c} \vec{\Omega} = & \begin{array}{l} r_x \\ r_y \\ r_z \end{array} \\ b_0 & \\ \vec{\delta}_M = & \begin{array}{l} t_x \\ t_y \\ t_z \end{array} \\ M & b_0 \end{array} \right\}_{b_0} \quad (2.1)$$

Par la suite, nous modéliserons les variations géométriques par la position relative de deux repères à l'aide du torseur de petits déplacement.

## I.2 Changement de base d'expression des variations géométriques

La modélisation par torseur des petits déplacements des petites variations géométriques dans un repère local doit pouvoir être exprimée dans un repère global au mécanisme. Ceci afin d'être pris en compte dans les calculs de chaînes de cotes tridimensionnelles.

Soit le passage d'un repère  $R_1$  à un repère  $R_0$  caractérisé par une matrice de rotation  $R_{01}$  et un vecteur translation  $\vec{O_0O_1} \Big|_{R_0} = (X; Y; Z)$ .

Nous allons définir une matrice de passage  $P_{01}$  permettant d'obtenir le torseur de petits déplacements  $\{T_{(O_1)}\}_{b_1}$  dans le repère  $R_0$  à partir de son expression dans le repère  $R_1 : \{T_{(O_0)}\}_{b_0}$ .

La résultante du torseur de petits déplacements exprimée dans la base  $b_1$  devient dans la base  $b_0$  :

$$\vec{\Omega}\Big|_{b_0} = R_{01} \cdot \vec{\Omega}\Big|_{b_1} \quad (2.2)$$

Le vecteur de translation exprimé au point  $O_1$  dans le repère  $R_1$  devient au point  $O_0$  dans le repère  $R_0$  :

$$\vec{\delta}_{O_0}\Big|_{b_0} = \vec{\delta}_{O_1}\Big|_{b_0} + \vec{O_0O_1}\Big|_{b_0} \wedge \vec{\Omega}\Big|_{b_0} \quad (2.3)$$

$$\text{Si } \vec{O_0O_1}\Big|_{b_0} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \text{ on note } \widetilde{O_0O_1}\Big|_{b_0} = \begin{bmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{bmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$\vec{\delta}_{O_0}\Big|_{b_0} = R_{01} \cdot \vec{\delta}_{O_1}\Big|_{b_1} + \widetilde{O_0O_1} * R_{01} \cdot \vec{\Omega}\Big|_{b_1} \quad (2.4)$$

On obtient donc  $P_{01}$  la matrice de passage telle que :  $\{T_{(O_0)}\}_{b_0} = P_{01} \cdot \{T_{(O_1)}\}_{b_1}$

$$\begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{\delta}_{O_0} \end{Bmatrix}_{b_0} = \begin{bmatrix} R_{01} & 0 \\ \widetilde{O_0O_1} \cdot R_{01} & R_{01} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{\delta}_{O_1} \end{Bmatrix}_{b_1} \quad (2.5)$$

C'est sur ces outils de base que se fonde la modélisation par l'outil domaine des écarts géométriques associés aux surfaces tolérancées et aux jeux de liaisons.

## II Modélisation du tolérancement géométrique par l'outil domaine

Le tolérancement ainsi que les jeux dans les liaisons introduisent des variations géométriques dont on cherche à connaître l'ampleur et l'incidence sur la fonctionnalité du mécanisme.

### II.1 Géométrie

#### II.1.a Hypothèses

La modélisation du tolérancement géométrique par l'outil domaine se fait sous certaines conditions. Par la suite, nous ferons l'hypothèse que :

- Les mécanismes sont constitués de pièces rigides. Leur déformation est supposée négligeable devant les défauts géométriques.

*Remarque* : Cette hypothèse introduit un risque de sur-qualité. En effet, certains mécanismes peuvent être rebutés alors que leur assemblage serait possible au prix de déformations maîtrisées. Des travaux ont été effectués afin d'enrichir le modèle avec prise en compte des déformations élastiques des pièces [Petit 04, Samper 07].

- Les défauts de forme des surfaces sont négligés. Une surface de substitution est associée au nuage de points issu de la mesure tridimensionnelle de la surface réelle. Le critère d'association est défini au préalable suivant la nature de la surface, du tolérancement et le calcul effectué : moindre carré, tangent extérieur matière minimisant l'écart maximum pour une référence ou pour assurer l'assemblage, etc... Pierre-Antoine Adragna a montré que les défauts de forme pouvaient être négligés lorsque les jeux étaient d'un ordre de grandeur supérieur [Adragna 10].
- Les écarts de position et d'orientation des surfaces associées par rapport au nominal ainsi que les jeux entre pièces sont supposés assez faibles pour que les déplacements correspondants puissent être linéarisés (hypothèse de petits déplacements).

### II.1.b Paramétrage

Les variations géométriques autorisées par le tolérancement et les jeux sont caractérisés par la position des différents repères associés à la géométrie. Pour une même pièce, différentes sortes de géométries et de repères associés sont définis :

- La géométrie nominale qui définit la forme théorique des pièces conçues en bureau d'étude (équivalent au modèle nominal du langage *GeoSpelling* [Ballu 01]). A partir de cette géométrie, nous pouvons construire :
  - ▷ Un repère global  $R_G$  fixant la position et l'orientation de la pièce (placé au centre d'inertie de la pièce ou construit à partir de surfaces de la pièce par exemple).
  - ▷ Un repère de référence  $R_R$  pour chaque système de référence. Construit et positionné par rapport aux surfaces nominales de référence, ce repère possède les mêmes degrés de liberté que le système de référence.
  - ▷ Un repère  $R_N$  lié à chaque surface fonctionnelle nominale de la pièce. En fonction de la classe d'invariance de la surface [Clément 97], nous associons une classe d'équivalence de repères (deux repères sont équivalents si pour toute position de l'un il existe une position de l'autre compatible avec les déplacements de la classe donnée qui permette de les faire coïncider totalement).
- Une géométrie réelle issue de la mesure (équivalent au "Skin" modèle du langage *GeoSpelling* [Ballu 01]).
- Une géométrie "de substitution" construite à partir de la géométrie extraite par la mesure. Pour chaque surface réelle extraite, un critère d'association permet de positionner une surface de forme théorique exacte.
  - ▷ Un repère  $R_S$  est construit à partir de chaque surface de substitution. Celui-ci possède les mêmes degrés de liberté que la surface théorique exacte associée. Il définit la position et l'orientation de la surface de substitution.

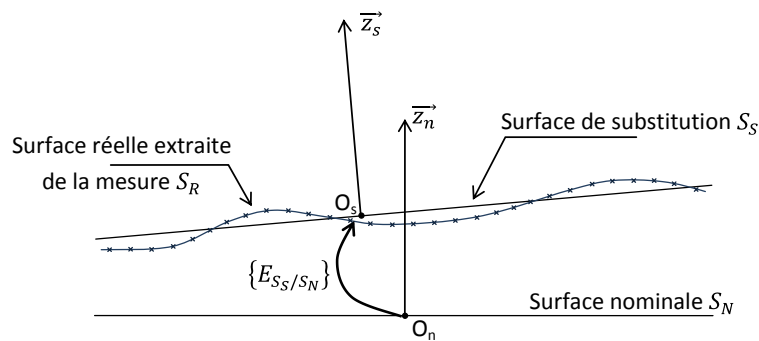


Fig. 2.3 – Surface nominale et de substitution et repères associés

→ Ainsi, les écarts et les jeux en position et en orientation peuvent être modélisés par un torseur de petits déplacements exprimant la position relative entre le repère nominal et celui de substitution (fig. 2.3).

*Remarque :* Suivant les problèmes à traiter, nous pourrions utiliser d'autres géométries théoriques parfaites ayant les mêmes propriétés que la géométrie nominale définie en bureau d'étude, telles que :

- Une géométrie cible qui définit la forme théorique exacte de la pièce dans le cas de distributions de tolérances symétriques.
- Une géométrie au maximum matière (dimensions maximales pour les surfaces extérieures et minimales pour les surfaces intérieures) ou au minimum matière (dimensions minimales pour les surfaces extérieures et maximales pour les surfaces intérieures).

### II.1.c Condition fonctionnelle

Une condition fonctionnelle décrit une aptitude à l'emploi (montabilité, étanchéité, ...). Elle se traduit par des contraintes géométriques (jeu minimum, ajustement, ...) sur les surfaces terminales appelées "surfaces fonctionnelles". Ces contraintes se répercutent sur l'ensemble des surfaces de liaison composant la boucle d'assemblage reliant les surfaces fonctionnelles.

Ces contraintes géométriques sont modélisées par le tolérancement fonctionnel. D'après la norme ISO 1101 [NF-EN-ISO-1101 06] celui-ci définit des zones dans lesquelles sont limitées les variations géométriques des surfaces tolérancées. La surface réelle doit rester incluse dans cette zone de tolérance.

Sur une pièce unique, la zone de tolérance est définie par :

- **Sa forme** : totalement déterminée par la topologie de la surface tolérancée.
- **Son étendue et sa position** : par défaut une zone de tolérance s'applique sur l'ensemble de l'étendue de la surface tolérancée. Dans certain cas, celle-ci peut s'appliquer sur la projection de la surface dans une zone extérieure (tolérancement en zone projetée) ou uniquement sur une zone restreinte de la surface.
- **Sa largeur** : Définie par la valeur "t" de la tolérance.
- **Ses degrés de liberté** : définis par :
  - ▷ *Référence* : Le système de référence peut être simple (une seule surface de référence) ou composé (ensemble de surfaces de référence hiérarchisées ou non). La zone de tolérance est mise en position par rapport à ce système de référence. Elle possède donc les mêmes degrés de liberté que celui-ci.
  - ▷ *Le type de spécification* :
    - *Forme* : dans le cas d'un tolérancement de forme, la zone de tolérance conserve tous ses degrés de liberté afin d'inclure la surface tolérancée.
    - *Orientation* : Les degrés de liberté de rotation de la zone de tolérance sont bloqués afin de limiter ceux de la surface tolérancée.
    - *Localisation* : Les degrés de liberté de la zone de tolérance fixés par le système de référence sont bloqués afin de limiter ceux de la surface tolérancée.
  - ▷ *Degré de liberté de la surface tolérancée*

Les variations géométriques limitées par le tolérancement d'une pièce unique ont un impact sur l'ensemble du mécanisme. Il faut donc les étudier dans leur globalité. L'influence des variations géométriques ne devra pas être prise en compte de la même manière suivant le rôle des jeux de liaison au sein du mécanisme. Jean-Yves Dantan différencie 2 cas distincts qu'il formalise avec des opérateurs mathématiques ( $\forall$ ,  $\exists$ ) [Dantan 09]. De la même manière, nous parlerons de :

- **Jeux défavorables** : lorsque la condition fonctionnelle doit être vérifiée pour toute ( $\forall$ ) configuration des jeux de liaison.
- **Jeux favorables** : lorsqu'il doit exister ( $\exists$ ) au moins une configuration de jeux telle que la condition fonctionnelle soit respectée.
- **Jeux donnés** : lorsque la condition fonctionnelle doit être respectée pour une configuration de jeux donnée parfois aussi appelé de "jeu polarisé" [Hoecke 12].

## II.2 Domaines Écarts

Les domaines écarts sont des outils mathématiques. Ils modélisent les petits déplacements autorisés par le tolérancement d'une entité géométrique à l'intérieur de sa zone de tolérance. Cette modélisation se fait donc dans un espace de dimension inférieure ou égale à 6 (3 translations et 3 rotations).

Le domaine écart permet donc d'exprimer le tolérancement normalisé sous la forme d'un outil mathématique adapté aux calculs de type "chaînes de cotes tridimensionnelles". La section de ce domaine dans un espace de dimension inférieure ou égale à 3, donne une représentation graphique que nous utiliserons pour illustrer nos méthodes et calculs.

La modélisation par "domaines" se base sur la théorie des petits déplacements. Les variations géométriques seront donc représentées par un torseur des petits déplacements appelé "Torseur Écart".

### II.2.a Torseur Écart

#### ◇ Torseur écart associé à une surface

La géométrie théorique dite nominale d'un solide étant définie par un modèle CAO, on veut quantifier les "défauts" d'une pièce réelle. Pour ce faire, on décompose cette pièce en surfaces élémentaires. On associe une surface théorique et un repère à chacune d'elles (cf. § II.1.b). À l'aide d'un critère défini (repère principal d'inertie, points particuliers,...) on associe au solide nominal un repère pièce. Avec ce même critère on construit à partir des éléments extraits de la mesure du solide réel un repère pièce. En faisant coïncider ces deux repères, on fait apparaître un écart entre la position théorique et réelle des repères liés aux surfaces dont on veut identifier les défauts de position et d'orientation. Ces écarts linéarisés définissent le torseur écart  $\{T_{ecart}\}$ . Il est défini par une résultante  $\vec{\Omega}$ , vecteur rotation  $(r_x, r_y, r_z)$  et un moment  $\vec{\delta}_M$ , vecteur translation  $(t_x, t_y, t_z)$  d'un point donné M (fig. 2.3).

De par la topologie de la surface, certaines composantes du torseur écarts peuvent être indéterminées. Dans une représentation de surfaces parfaites infinies, ces composantes correspondent aux mouvements qui laissent invariante la surface. D'un point de vue cinématique, elles représentent les degrés de liberté de la surface. Elles n'ont donc aucune influence sur l'assemblage et leur valeur sera arbitrairement mise à zéro.

De la même manière, les composantes de petits déplacements correspondant aux degrés de liberté de la zone de tolérance associée à la surface ne sont pas mesurables d'un point de vue contrôle. Elles ne pourront donc pas être prises en compte dans la qualification de la pièce et seront également mises à zéro.

#### ◇ Exemple de torseur écart : surface plane tolérancée en orientation

Soit une surface plane spécifiée en orientation par rapport à une surface plane de référence "A". Un repère de référence  $R_A$  est construit à partir de la référence A et un repère  $R_N$  est associé à la surface nominale tolérancée (fig. 2.4). L'axe  $\vec{z}$  correspond à la normale extérieure matière de la surface.

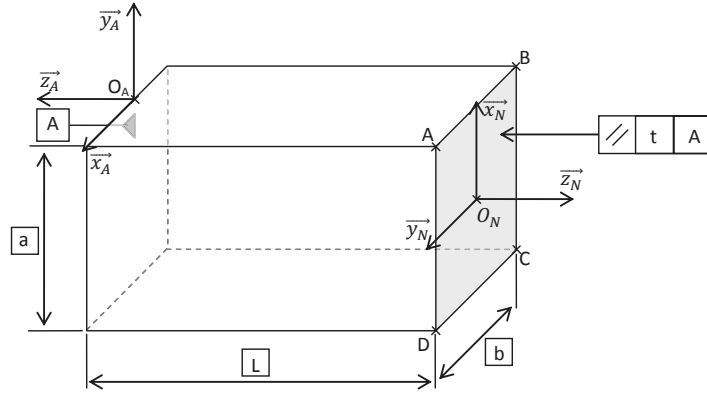


Fig. 2.4 – Surface plane spécifiée en orientation

Le torseur écarts représente, les variations géométriques possibles de la surface tolérancée. Soit  $R_S$  le repère associé à la surface de substitution construite à partir des points extraits de la mesure de la surface tolérancée, le torseur écart s'écrit comme la variation de position relative du repère  $R_S$  par rapport au repère  $R_N$ .

La surface tolérancée est plane. Ce type de surface reste invariant par rotation autour de sa normale et par translation dans le plan. Les composantes de petits déplacements correspondantes seront donc considérées comme nulles ( $r_z = t_x = t_y = 0$  dans le repère local de la surface tolérancée).

Les composantes de petits déplacements du torseur écart correspondant aux degrés de liberté de la zone de tolérance (composantes non mesurables) sont également fixées à 0. La zone de tolérance est définie par une spécification d'orientation de référence A. La surface réelle doit donc être comprise entre deux plans parallèles distants de la tolérance "t" et perpendiculaires à la surface de référence A. On retrouve, comme degrés de liberté, les degrés de liberté de la surface tolérancée, corroborant ainsi la cohérence du tolérancement qualitatif. Comme il s'agit d'une spécification d'orientation, l'ensemble des composantes de translation, et en particulier celle suivant l'axe  $\vec{z}_N$  sont des degrés de liberté de la zone de tolérance. Dans le repère local de la surface tolérancée, la composante  $t_z$  du torseur écart n'est donc pas mesurable. Elle est assimilée à un mouvement de solide rigide et est, par convention, fixée à 0.

Ainsi, on obtient un torseur écart de la forme (eqn. 2.6) :

$$\{T_{ecart}(O_N)\}_{b_N} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} = \begin{matrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{matrix} \\ \vec{\delta}_{O_N} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{Bmatrix}_{b_N} \quad (2.6)$$

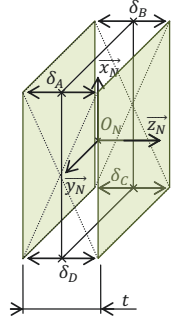
## II.2.b Modélisation de l'étendue des variations géométriques autorisées par le tolérancement

En prenant en compte les dimensions de la surface tolérancée ainsi que la largeur "t" de la zone de tolérance, il devient possible de calculer l'étendue des variations géométriques autorisées par le tolérancement. Cela revient à limiter les petits déplacements du repère associé à la surface de substitution tolérancée par rapport au repère associé à la surface nominale tolérancée.

La surface réelle, malgré ses variations géométriques doit rester à l'intérieur de sa zone de tolérance. Cette contrainte s'écrit sous la forme d'un système d'inéquations portant sur les composantes de petits déplacements du torseur écart précédemment défini par rapport aux dimensions géométriques de la pièce et de la valeur "t" de la tolérance.

Ce système s'obtient en limitant le déplacement de chaque point caractéristique du contour de la surface suivant sa normale puis en ramenant l'ensemble de ces inéquations au même point d'expression du torseur écart.

Dans l'exemple précédant (fig. 2.4), les points frontières de la surface sont les points A, B, C et D. La limitation de leur déplacement à l'intérieur de la zone de tolérance suivant la normale à la surface (fig. 2.5) nous donne le système d'inéquations suivant (eqn. 2.7) :



$$\begin{cases} -t/2 \leq \vec{\delta}_A \cdot \vec{z} \leq t/2 \\ -t/2 \leq \vec{\delta}_B \cdot \vec{z} \leq t/2 \\ -t/2 \leq \vec{\delta}_C \cdot \vec{z} \leq t/2 \\ -t/2 \leq \vec{\delta}_D \cdot \vec{z} \leq t/2 \end{cases} \quad (2.7)$$

Fig. 2.5 – Limitation du déplacement des points frontières à l'intérieur de la zone de tolérance

Les composantes de petits déplacements ainsi que les paramètres géométriques sont pris en compte en ramenant ces inéquations au point d'expression du torseur écart.

Soit  $M$  le point caractéristique du contour de la surface, la formule de Varignon (eqn. 2.8) permet d'exprimer le moment au point  $M$  du torseur écart en fonction de sa résultante et de son moment au point  $O$  :

$$\vec{\delta}_M = \vec{\delta}_O + (\vec{MO} \wedge \vec{\Omega}) \quad (2.8)$$

D'où, le déplacement suivant la normale  $\vec{n}$  :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_M \cdot \vec{n} &= \vec{\delta}_O \cdot \vec{n} + (\vec{MO} \wedge \vec{\Omega}) \cdot \vec{n} \\ \Rightarrow \vec{\delta}_M \cdot \vec{n} &= \vec{\delta}_O \cdot \vec{n} + (\vec{OM} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{\Omega} \end{aligned} \quad (2.9)$$

En utilisant le torseur écart (eqn. 2.6) défini dans l'exemple précédent (fig. 2.4), nous obtenons (eqn. 2.10) :

$$\vec{\delta}_M \cdot \vec{z} = 0 + \begin{vmatrix} Y_M & & \\ -X_M & * & \\ 0 & & b_N \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

En appliquant cette transformation sur l'ensemble des inéquations limitant les déplacements des points du contour de la surface (eqn. 2.7), on obtient un système de 4 inéquations (eqn. 2.11).

Ce système d'inéquations, auquel on ajoute la condition de nullité des composantes correspondant au degré de liberté, définit le domaine écart  $[E]$  de la surface tolérancée en orientation par rapport à la surface de référence A au point  $O_N$  dans la base  $b_N$ .

$$[E(O_N)]_{b_N} = \begin{cases} \frac{b}{2} * r_x - \frac{a}{2} * r_y \leq t/2 \\ -\frac{b}{2} * r_x - \frac{a}{2} * r_y \leq t/2 \\ -\frac{b}{2} * r_x + \frac{a}{2} * r_y \leq t/2 \\ \frac{b}{2} * r_x + \frac{a}{2} * r_y \leq t/2 \end{cases} \quad (2.11)$$

De manière générale, dans un espace de dimension inférieure ou égale à 6, chaque inéquation représente un demi hyper-espace limité par un hyper-plan. L'intersection de tous ces demi hyper-espaces définit le domaine écart.

Lorsque la tolérance décrit une condition fonctionnelle, chaque hyper-plan frontière sera appelé condition fonctionnelle élémentaire<sup>1</sup>. L'ensemble de ces conditions fonctionnelles élémentaires définissent totalement la condition fonctionnelle associée<sup>2</sup>.

La représentation graphique du domaine écart offre une meilleure lisibilité des variations géométriques autorisées par le tolérancement. Dans notre exemple, le domaine écart est défini par l'intersection de 4 demi-espaces dans le plan  $(r_x, r_y)$  (fig. 2.6).

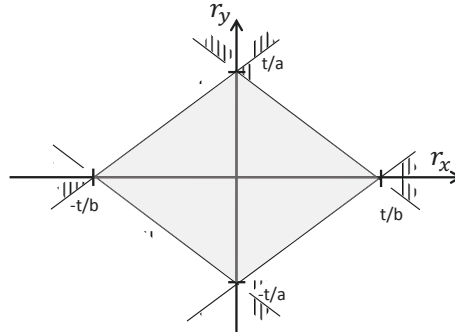


Fig. 2.6 – Représentation graphique dans le plan  $(r_x, r_y)$  du domaine écarts relatif à la spécification en orientation d'une surface plane rectangulaire  $(a*b)$  défini au point  $O_N$  centre de la surface.

Le domaine peut être défini par les inéquations, ou par les hyperplans frontières orientés ou bien par les sommets qui correspondent à des configurations particulières de la surface tolérancée dans sa zone de tolérance (on retrouve la représentation du modèle T-Map).

## II.2.c Application à différents types de surfaces et de tolérances

### ♦ Spécifications multiples

Le domaine écart représente les petits déplacements d'une surface autorisés par son tolérancement. Ce tolérancement peut être composé de plusieurs spécifications. (fig. 2.7).

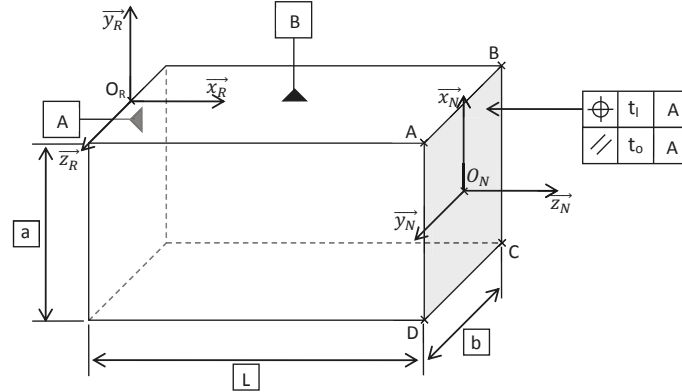


Fig. 2.7 – Tolérancement d'une surface plane par deux spécifications

Avec  $t_0 < t_l$  pour que la spécification d'orientation ait un sens.

1. Par analogie nous pouvons associer les conditions élémentaires constituant un domaine aux droites d'analyses utilisées dans la méthode CLIC de B. Anselmetti [Chavanne 09a]

2. A la différence du domaine écarts, les dimensions indéterminées du domaine condition fonctionnelle ne seront pas limité (même définition que pour le domaine jeux)



### ▷ Spécification de localisation

La surface tolérancée est une surface plane de normale extérieure à la surface  $\vec{z}_N$ . La zone de tolérance est limitée par 2 plans parallèles distants de la tolérance  $t_l$  et dont le plan médian est mis en position par rapport au plan de référence A. Cette zone de tolérance n'ajoute donc pas de degré de liberté à ceux de la surface tolérancée. Le torseur écart associé à cette tolérance, écrit au point  $O_N$  centre de la surface nominale tolérancée, est donc de la forme (eqn. 2.12) :

$$\{T_{loc}(O_N)\}_{b_N} = \left\{ \begin{array}{c|c} \vec{\Omega} = & \begin{array}{c} r_x \\ r_y \\ 0 \end{array} \\ b_N & \\ \vec{\delta}_{O_N} = & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ t_z \end{array} \\ O_N & b_N \end{array} \right\}_{b_N} \quad (2.12)$$

Le domaine écart relatif à la spécification de localisation est donc défini dans un espace de dimension 3 :  $(r_x, r_y$  et  $t_z)$ . En limitant les petits déplacements des points A, B, C et D dans la zone de tolérance et en écrivant ces relations au point  $O_N$  centre de la surface nominale, on obtient un système de 8 inéquations définissant le domaine écart (eqn. 2.13) :

$$[E_{loc}(O_N)]_{b_N} = \left\{ \begin{array}{lcl} -t_l/2 \leq & \frac{b}{2} * r_x - \frac{a}{2} * r_y + t_z & \leq t_l/2 \\ -t_l/2 \leq & -\frac{b}{2} * r_x - \frac{a}{2} * r_y + t_z & \leq t_l/2 \\ -t_l/2 \leq & -\frac{b}{2} * r_x + \frac{a}{2} * r_y + t_z & \leq t_l/2 \\ -t_l/2 \leq & \frac{b}{2} * r_x + \frac{a}{2} * r_y + t_z & \leq t_l/2 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Le domaine écart est donc défini par 8 plans frontières (conditions fonctionnelles élémentaires) dans l'espace  $(r_x, r_y, t_z)$  (fig. 2.8)

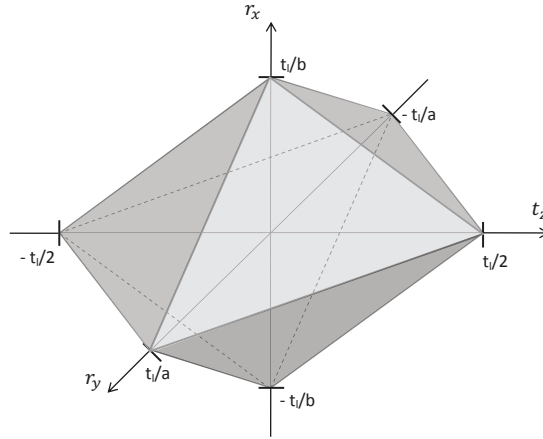


Fig. 2.8 – Domaine écart écrit au point  $O_N$  relatif à la spécification de localisation

### ▷ Spécification d'orientation

On retrouve le même cas de figure que l'exemple du paragraphe précédent (cf. § II.2.a). En reportant dans le système d'inéquations (2.11) la valeur de la tolérance d'orientation  $t_o$ , on obtient la définition suivante du domaine écart au point  $O_N$  :

$$[E_{ori}(O_N)]_{b_N} = \begin{cases} \frac{b}{2} * r_x - \frac{a}{2} * r_y & \leq t_o/2 \\ -\frac{b}{2} * r_x - \frac{a}{2} * r_y & \leq t_o/2 \\ -\frac{b}{2} * r_x + \frac{a}{2} * r_y & \leq t_o/2 \\ \frac{b}{2} * r_x + \frac{a}{2} * r_y & \leq t_o/2 \end{cases} \quad (2.14)$$

### ▷ Domaine écart

Le domaine écart représentant le tolérancement complet doit prendre en compte les spécifications de localisation et d'orientation. Il est donc défini par la concaténation des systèmes d'inéquations (2.14) et (2.13) définissant les domaines écarts  $[E_{loc}]$  et  $[E_{ori}]$  au point  $O_N$  centre de la surface.

$$[E(O_N)]_{b_N} = \begin{cases} -t_l/2 \leq \frac{b}{2} * r_x - \frac{a}{2} * r_y + t_z & \leq t_l/2 \\ -t_l/2 \leq -\frac{b}{2} * r_x - \frac{a}{2} * r_y + t_z & \leq t_l/2 \\ -t_l/2 \leq -\frac{b}{2} * r_x + \frac{a}{2} * r_y + t_z & \leq t_l/2 \\ -t_l/2 \leq \frac{b}{2} * r_x + \frac{a}{2} * r_y + t_z & \leq t_l/2 \\ \frac{b}{2} * r_x - \frac{a}{2} * r_y & \leq t_o/2 \\ -\frac{b}{2} * r_x - \frac{a}{2} * r_y & \leq t_o/2 \\ -\frac{b}{2} * r_x + \frac{a}{2} * r_y & \leq t_o/2 \\ \frac{b}{2} * r_x + \frac{a}{2} * r_y & \leq t_o/2 \end{cases} \quad (2.15)$$

Le domaine écart est donc défini par 12 (8+4) conditions élémentaires dans l'espace  $(r_x, r_y, t_z)$  (fig. 2.9)

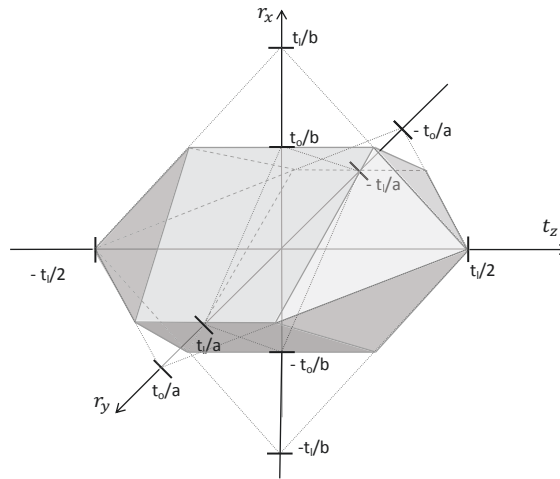


Fig. 2.9 – Domaine écart écrit au point  $O_N$  relatif à la spécification de localisation et d'orientation

▷ **Changement de point et de base d'expression du domaine écart**

Le domaine écart obtenu précédemment peut être exprimé dans le repère de référence  $R_R$  par exemple, à l'aide des matrices de passage définies au paragraphe (I.2).

Le passage du repère  $R_N$  au repère  $R_R$  est modélisé par la matrice de passage  $\underline{\underline{P}}_{R_N \rightarrow R_R}$  (eqn. 2.16).

$$\underline{\underline{P}}_{R_N \rightarrow R_R} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{R}}_{R_N \rightarrow R_R} & 0 \\ \widetilde{O_N O_R} \cdot \underline{\underline{R}}_{R_N \rightarrow R_R} & \underline{\underline{R}}_{R_N \rightarrow R_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{2} & -L & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{a}{2} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

D'après la relation de changement de point et de base d'expression du torseur écart, les composantes de petits déplacements dans le repère  $R_N$  s'expriment en fonction des petits déplacements dans le repère  $R_R$  (eqn. 2.17b) :

$$\{T(O_N)\}_{b_N} = \underline{\underline{P}}_{R_N \rightarrow R_R} * \{T(O_R)\}_{b_R} \quad (2.17a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_{x_N} = r_{y_R} \\ r_{y_N} = r_{z_R} \\ r_{z_N} = r_{x_R} \\ t_{x_N} = L * r_{z_R} + t_{y_R} \\ t_{y_N} = -\frac{a}{2} * r_{x_R} - L * r_{y_R} + t_{z_R} \\ t_{z_N} = \frac{a}{2} * r_{z_R} + t_{x_R} \end{cases} \quad (2.17b)$$

Le système d'inéquations définissant le domaine écart devient donc dans le repère de référence  $R_R$  :

$$[E_{O_R}]_{b_R} = \begin{cases} -t_l/2 \leq \frac{b}{2} * r_{y_R} - \frac{a}{2} * r_{z_R} + \frac{a}{2} * r_{z_R} + t_{x_R} \leq t_l/2 \\ -t_l/2 \leq -\frac{b}{2} * r_{y_R} - \frac{a}{2} * r_{z_R} + \frac{a}{2} * r_{z_R} + t_{x_R} \leq t_l/2 \\ -t_l/2 \leq -\frac{b}{2} * r_{y_R} + \frac{a}{2} * r_{z_R} + \frac{a}{2} * r_{z_R} + t_{x_R} \leq t_l/2 \\ -t_l/2 \leq \frac{b}{2} * r_{y_R} + \frac{a}{2} * r_{z_R} + \frac{a}{2} * r_{z_R} + t_{x_R} \leq t_l/2 \\ \frac{b}{2} * r_{y_R} - \frac{a}{2} * r_{z_R} \leq t_o/2 \\ -\frac{b}{2} * r_{y_R} - \frac{a}{2} * r_{z_R} \leq t_o/2 \\ -\frac{b}{2} * r_{y_R} + \frac{a}{2} * r_{z_R} \leq t_o/2 \\ \frac{b}{2} * r_{y_R} + \frac{a}{2} * r_{z_R} \leq t_o/2 \end{cases} \quad (2.18)$$

La figure suivante (fig. 2.10) illustre la section dans le plan  $(r_{y_N}, t_{z_N})$  du domaine écart lors du passage du repère local  $R_N$  au repère de référence  $R_R$ .

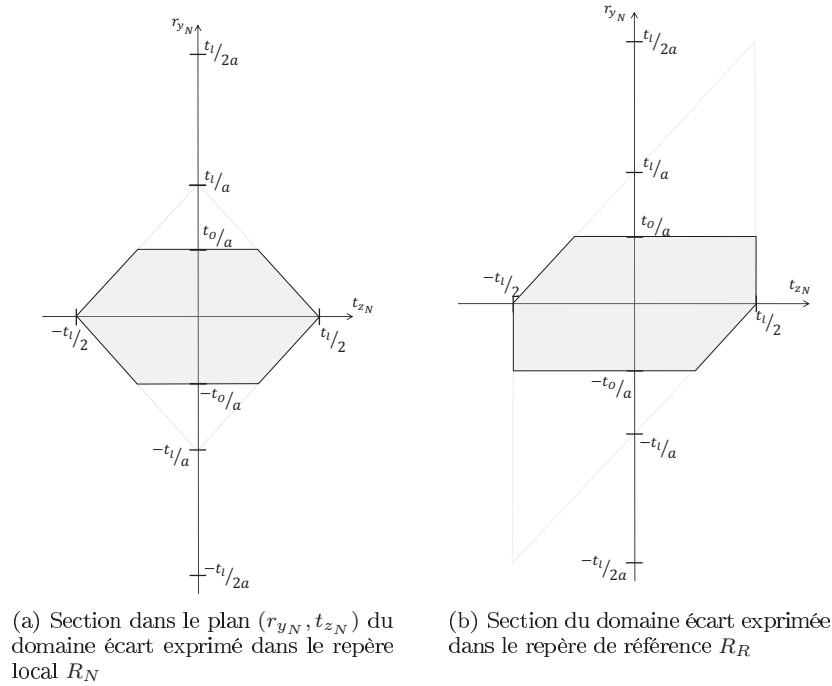


Fig. 2.10 – Transformation de la section du domaine écart lors du passage du repère local  $R_N$  au repère de référence  $R_R$

*Remarque :* La transformation peut s'obtenir en appliquant indifféremment la formule de changement de point sur les équations d'hyper-plans frontières ou sur les coordonnées des sommets du domaine.

#### ◇ Domaine écart d'une surface quadratique

Dans le cas de la localisation de l'axe d'un cylindre, illustré ci-dessous (fig. 2.11), la zone de tolérance est cylindrique.

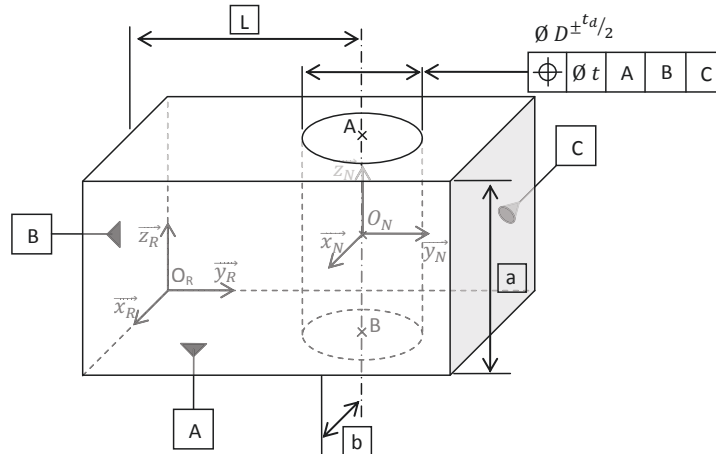


Fig. 2.11 – Localisation de l'axe d'un cylindre

L'axe réel du cylindre tolérancé doit être inclus dans une zone de tolérance cylindrique de diamètre  $t$  et mis en position par rapport au système de références composé des surfaces de référence A, B et C.

Dans ce cas, le domaine écart s'obtient en limitant le déplacement des points extrêmes de l'axe tolérancé suivant toutes les directions du plan radial. Le domaine écart  $[E(O_N)]_{b_N}$  est donc défini par des relations quadratiques (eqn. 2.19b) :

$$[E(O_N)]_{b_N} = \left\{ \begin{array}{l} \left( \vec{\delta}_A \cdot \vec{x} \right)^2 + \left( \vec{\delta}_A \cdot \vec{y} \right)^2 \leq \frac{t^2}{4} \\ \left( \vec{\delta}_B \cdot \vec{x} \right)^2 + \left( \vec{\delta}_B \cdot \vec{y} \right)^2 \leq \frac{t^2}{4} \end{array} \right. \quad (2.19a)$$

$$\Rightarrow [E(O_N)]_{b_N} = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{a}{2} * r_y + t_x \right)^2 + \left( -\frac{a}{2} * r_x + t_y \right)^2 \leq \frac{t^2}{4} \\ \left( -\frac{a}{2} * r_y + t_x \right)^2 + \left( \frac{a}{2} * r_x + t_y \right)^2 \leq \frac{t^2}{4} \end{array} \right. \quad (2.19b)$$

Le domaine écart peut être interprété géométriquement comme l'intersection de deux volumes tridimensionnels dans un espace à 4 dimensions. Les 2 volumes étant deux cylindres de courbe directrice circulaire de rayon  $\frac{t}{2}$  dans le plan  $(t_x, t_y)$  et de génératrice, une droite d'équation respectivement  $\frac{a}{2} * r_y + t_x = \frac{t}{2}$  et  $-\frac{a}{2} * r_y + t_x = \frac{t}{2}$ .

La représentation graphique dans l'espace à 3 dimensions  $(t_x, t_y, r_y)$  de ce domaine est illustrée ci-dessous (fig. 2.12) :

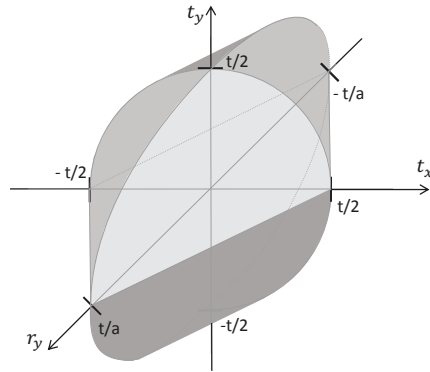


Fig. 2.12 – Section dans l'espace  $(\vec{t}_x, \vec{t}_y, \vec{r}_y)$  du domaine écart associé à la tolérance de localisation de l'axe du cylindre

Les méthodes de calcul sur les domaines développées par la suite, nécessitent que ceux-ci soient définis par un ensemble d'inéquations linéaires. De manière générale, lorsque la zone de tolérance ou la surface tolérancée présente des frontières non linéaires, celles-ci seront discrétisées afin d'obtenir un système d'équations linéaires. Le pas de discrétisation sera choisi afin d'optimiser le compromis entre le temps de calcul (pas de discrétisation élevé) et la précision (pas de discrétisation faible).

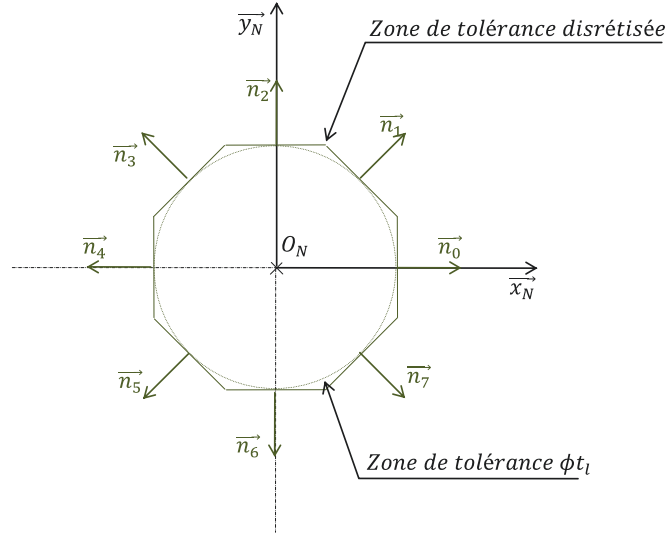


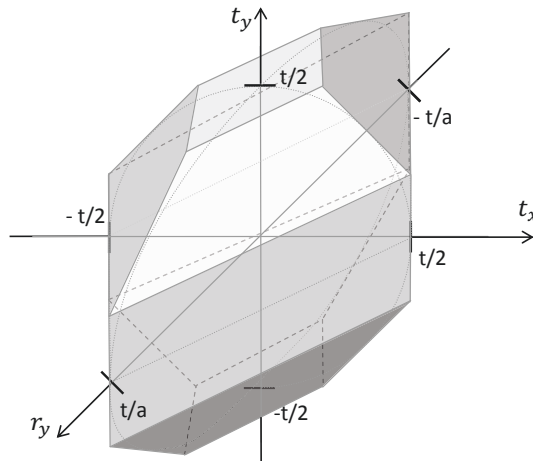
Fig. 2.13 – Linéarisation de la zone de tolérance

Généralement, dans le cas d'une zone de tolérance cylindrique, nous nous limiterons à 8 directions d'étude  $\vec{n}_k$  équiréparties dans le plan radial (fig. 2.13). Le domaine écarts facétisé est donc défini par le système d'inéquations suivant (eqn. 2.20) :

Soit  $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

$$[E(O_N)]_{b_N} = \begin{cases} -\frac{t}{2} \leq & \left( \frac{a}{2} * r_y + t_x \right) * \cos\left(\frac{k*\pi}{4}\right) + \left( -\frac{a}{2} * r_x + t_y \right) * \sin\left(\frac{k*\pi}{4}\right) \leq \frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \leq & \left( -\frac{a}{2} * r_y + t_x \right) * \cos\left(\frac{k*\pi}{4}\right) + \left( \frac{a}{2} * r_x + t_y \right) * \sin\left(\frac{k*\pi}{4}\right) \leq \frac{t}{2} \end{cases} \quad (2.20)$$

Le domaine écart est donc ainsi limité par 14 hyper-plans frontières (conditions fonctionnelles élémentaires). Sa représentation graphique dans l'espace  $(t_x, t_y, r_y)$  est illustrée ci-dessous (fig. 2.14) :


 Fig. 2.14 – Section du domaine écart linéarisé associé à la tolérance de localisation de l'axe du cylindre dans l'espace  $(\vec{r}_y, \vec{t}_x, \vec{t}_y)$

### ◇ Domaine écart d'une surface de forme quelconque

Le domaine écart est défini, quelle que soit la forme de la surface, par la limitation du déplacement de ses points caractéristiques.

#### ▷ Surface plane de contour quelconque

Pour une surface plane, dans le cas où les frontières de la surface sont linéaires, on s'intéresse aux sommets. Les portions de frontière non linéaire sont discrétisées suivant un pas dépendant de la précision souhaitée (avec une limitation due aux ressources de calcul). Cette discrétisation peut être englobante, englobée ou mixte.

Cependant, certains points peuvent engendrer des contraintes surabondantes. En particulier dans le cas de surfaces planes à frontières concaves. Afin d'obtenir un système d'inéquations linéaires minimal, seuls les points sommets de l'enveloppe polygonale convexe construite sur le contour de la surface sont pris en compte (fig. 2.15).

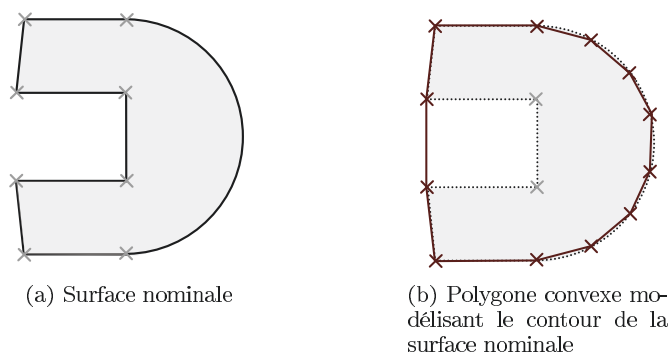


Fig. 2.15 – Détermination des points caractéristiques du contour de la surface tolérancée

La limitation du déplacement des points à l'intérieur du polygone convexe génère des hyper-plans frontières en dehors du domaine écart défini par la limitation du déplacement de l'ensemble des autres points contour. Le système d'inéquations est donc surabondant. En les supprimant, nous obtenons le système minimal définissant le domaine écart. La précision de cette modélisation dépend cependant de la finesse de la discrétisation.

#### ▷ Surface de forme quelconque

Lorsque la surface n'est pas plane, les points caractéristiques ne sont plus forcément sur le contour est leur localisation nécessite une étude plus approfondie. Une approximation peut être obtenue par maillage de la surface et suppression des contraintes surabondantes générées.

De même, lorsque le tolérancement est défini en zone projetée, les points caractéristiques sont sélectionnés dans cette zone projetée.

### ◇ Domaine écart d'une surface tolérancée par plusieurs spécifications

Dans le cas où différentes spécifications s'appliquent sur une même surface, le domaine écart résultant de la surface s'obtient par intersection de l'ensemble des domaines écarts construits pour chaque spécification (fig. 2.9). La forme et le nombre de sommets du domaine écart résultant peut donc varier en fonction du rapport entre les tolérances allouées à chaque spécification. Ce rapport devra donc être figé pour la suite des calculs.

Ainsi, toute zone de tolérance et donc toute spécifications géométriques (localisation, orientation, symétrie, coaxialité, ...) peuvent être représentées par un domaine écart. Dans le cas du modificateur au

maximum ou minimum de matière, le paramètre de taille du domaine varie en fonction des dimensions géométriques (la forme du domaine reste constante).

### II.3 Domaines Jeux

Les domaines jeux permettent de modéliser, de manière similaire aux domaines écarts, l'ensemble des variations géométriques relatives entre deux surfaces théoriques parfaites en contact avec ou sans jeu.

On se place dans les mêmes hypothèses de petits déplacements de solides indéformables, que pour les domaines écarts. Les petits déplacements autorisés par la géométrie de la liaison peuvent être représentés à l'aide d'un torseur appelé "Torseur Jeu".

#### II.3.a Torseur Jeux

##### ◇ Torseur jeux associé à une liaison

Le torseur jeu  $\{T_{jeu}\}$  d'une liaison représente la position relative entre les 2 surfaces théoriques parfaites composant cette liaison. Cette position est modélisée par le petit déplacement entre leurs deux repères associés.

La forme du torseur jeu dépend directement de la topologie des surfaces en contact. Les composantes de petits déplacements correspondant aux degrés de liberté de la liaison ne seront pas limitées<sup>3</sup>. Les autres mobilités seront limitées par la condition d'impénétrabilité des pièces entre elles.

##### ◇ Exemple de torseur jeu : liaison cylindre-cylindre

Soit la liaison composée de 2 cylindres de révolution d'axe  $\vec{z}$  (fig. 2.16).

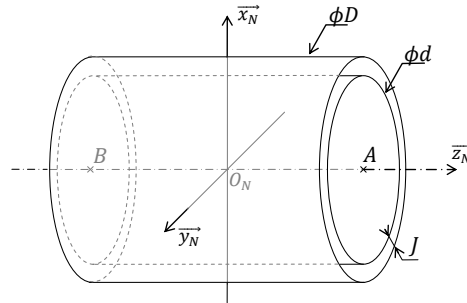


Fig. 2.16 – Liaison Cylindre-Cylindre

Ce type de liaison autorise 2 degrés de liberté ( $\omega_z$  et  $v_z$ ) et 4 mobilités internes dues aux jeux dans la liaison (notées  $\dot{j}_{r_x}$ ,  $\dot{j}_{r_y}$ ,  $\dot{j}_{t_x}$  et  $\dot{j}_{t_y}$ ). On obtient donc un torseur jeu de la forme (eqn. 2.21) :

$$\{T_{jeu}(O_N)\}_{b_N} = \left\{ \begin{array}{c|c} \vec{\Omega} = & \begin{array}{l} \dot{j}_{r_x} \\ \dot{j}_{r_y} \\ \omega_z \end{array} \\ b_N & \\ \vec{\delta}_{O_N} = & \begin{array}{l} \dot{j}_{t_x} \\ \dot{j}_{t_y} \\ v_z \end{array} \\ b_N & \end{array} \right\}_{b_N} \quad (2.21)$$

3. Contrairement aux degrés de liberté du torseur écart qui sont fixés à 0



### II.3.b Modélisation de l'étendue des variations géométriques autorisées par la condition d'impénétrabilité des pièces

De la même manière que pour les domaines écarts, en prenant en compte la géométrie du mécanisme, on génère un système d'inéquations modélisant les petits déplacements autorisés par la géométrie de la liaison. L'étendue de ces mobilités internes est évaluée en prenant en compte la non-interpénétration de la matière sur une géométrie théorique parfaite du mécanisme (géométrie nominale, cible, maximum ou minimum de matière, ...).

Dans le cas de la liaison cylindre-cylindre, les points extrêmes de l'axe peuvent se translater de la valeur du jeu  $J$  dans le plan perpendiculaire à l'axe. Ici,  $J$  est égal à la différence des diamètres ( $J = D - d$ ).

$$\begin{cases} \left( \vec{\delta}_A \cdot \vec{x} \right)^2 + \left( \vec{\delta}_A \cdot \vec{y} \right)^2 \leq \frac{J^2}{4} \\ \left( \vec{\delta}_B \cdot \vec{x} \right)^2 + \left( \vec{\delta}_B \cdot \vec{y} \right)^2 \leq \frac{J^2}{4} \end{cases} \quad \text{avec } J = D - d \quad (2.22)$$

En discrétisant les directions d'étude en 8 directions équiréparties, on obtient les inéquations suivantes (eqn. 2.23) :

Soit, en écrivant ce système au centre  $O_N$  de la liaison et en ajoutant les conditions sur les composantes correspondant aux degrés de liberté de la liaison, on obtient un système d'inéquations définissant le domaine jeu  $[J(O_N)]$  :

Soit  $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$  et  $J = D - d$

$$[J(O_N)]_{b_N} = \begin{cases} \frac{J}{2} \leq \left( \frac{a}{2} * r_y + t_x \right) * \cos\left(\frac{k*\pi}{4}\right) + \left( -\frac{a}{2} * r_x + t_y \right) * \sin\left(\frac{k*\pi}{4}\right) \leq \frac{J}{2} \\ \frac{J}{2} \leq \left( -\frac{a}{2} * r_y + t_x \right) * \cos\left(\frac{k*\pi}{4}\right) + \left( \frac{a}{2} * r_x + t_y \right) * \sin\left(\frac{k*\pi}{4}\right) \leq \frac{J}{2} \end{cases} \quad (2.23)$$

La section du domaine jeu  $[J(O_N)]$  dans l'espace tridimensionnel  $(t_x, t_y, t_z)$  est donnée ci-dessous (fig. 2.17) :

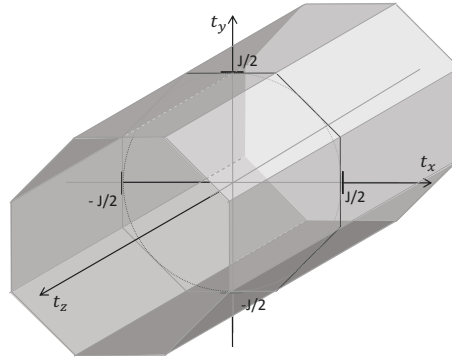


Fig. 2.17 – Section dans l'espace  $(t_x, t_y, t_z)$  du domaine jeu linéarisé associé à la liaison cylindre-cylindre

*Remarque :* A la différence des domaines écarts, les dimensions correspondant aux degrés de liberté de la liaison sont sans limite. En effet, une variation suivant une direction de ce genre ne peut être évaluée en terme de défaut (cf. § II.2.a) mais doit être prise en compte dans l'assemblage. Elle sera donc considérée comme une variation due aux jeux. On retrouve le fait que les défauts dans ces directions sont non mesurables et n'ont donc pas d'influence sur le respect de la condition fonctionnelle.

### III Modélisation de l'assemblage et opérations sur les domaines

L'ensemble des variations géométriques et mobilité d'une liaison sont donc décrites par les domaines écarts de chaque surface de contact et le domaine jeu entre les deux.

Soit l'assemblage de deux pièces par l'intermédiaire de leur surface de contact "1" et "2". L'étendue des défauts géométriques pour chaque surface est évaluée entre le repère  $R_N$  associé à la géométrie nominale et le repère  $R_S$  associé à la surface de substitution construite sur la surface réelle. Le jeu calculé entre les surfaces nominales est décalé de l'écart (fig. 2.18).

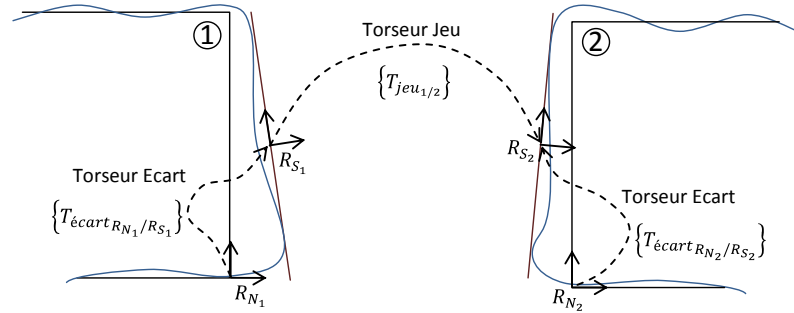


Fig. 2.18 – Modélisation des variations géométriques et mobilités d'une liaison

On retrouve un modèle similaire à la fermeture de chaîne torsorielle de Pierre Bourdet dans sa méthode  $\Delta tol$  [Bourdet 07].

L'influence sur l'ensemble du mécanisme, d'un défaut ou d'une mobilité au sein d'une liaison ne peut donc pas être étudiée indépendamment du reste de l'assemblage. Il est nécessaire de prendre en compte la structure complète du système.

Celle-ci peut être modélisée à l'aide d'un graphe.

#### III.1 Graphes d'analyse de structure

Le graphe utilisé au laboratoire SYMME [Giordano 05] indique les connexions entre les différents repères caractéristiques du mécanisme (fig. 2.19). Ce graphe est constitué de nœuds formés par les repères construits sur les entités géométriques étudiées et d'arcs représentant leur liaison. Afin de faciliter la lecture et la compréhension de la structure de l'assemblage, les pièces sont symbolisées par une ellipse. Les sommets placés au centre d'une ellipse correspondent aux repères pièce. Les autres, placés en périphérie, représentent les repères de substitution construits à partir des surfaces réelles. Les liaisons peuvent être de deux natures. Une liaison entre un repère "pièce" et un repère "surface" représente un écart et une liaison entre deux repères surface de pièces différentes représente un jeu de liaison.

Un domaine écart est associé à chaque arc reliant un repère pièce à un repère surface. de la même manière un domaine jeu est adjoint à chaque arc reliant deux repères de surfaces de liaison.

Une condition fonctionnelle est représentée de la même manière qu'un jeu, par un arc entre surfaces. Cela est cohérent au vu de sa définition par zone de tolérance (cf. § II.1.c). Ainsi, toute condition fonctionnelle peut être considérée comme un jeu de montage dans un gabarit de contrôle (condition de montabilité).

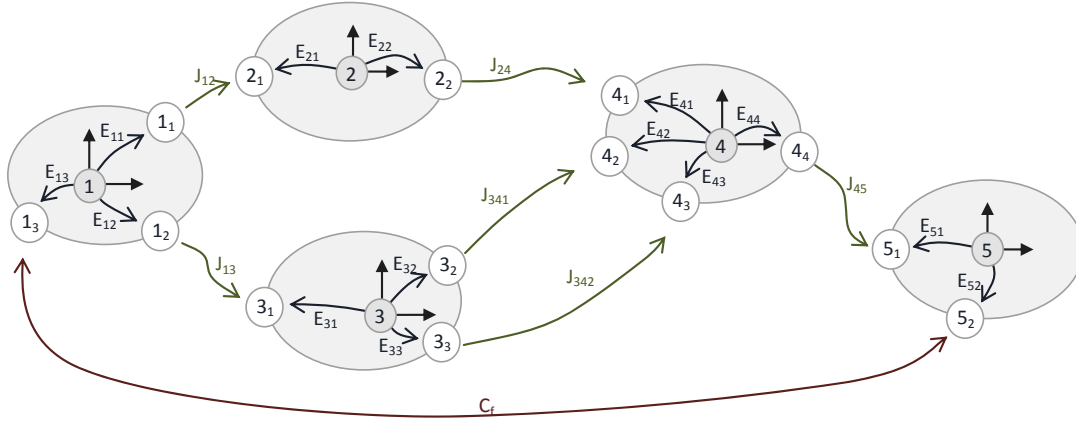


Fig. 2.19 – Exemple de graphe d'analyse selon Giordano [Giordano 05]

Ce type de modélisation offre un aperçu immédiat et systématique de la topologie du mécanisme. Pour tout type d'assemblage, celle-ci peut être explicitée comme la composition d'architectures basiques que nous proposons d'exposer, par ordre de complexité, ci-après.

*Remarque :* en général on construit un seul repère pièce par rapport auquel est tolérancé l'ensemble des surfaces de liaison (tolérancement de type "étoile"). Cependant, suivant le nombre de surfaces de liaison on peut avoir plusieurs repères pièce tolérancé entre eux (regroupement de surface de liaison) ou aucun (2 surface de liaison relié par un torseur écart).

### III.2 Architecture des mécanismes tridimensionnels

A chaque type d'architecture correspond une méthode de résolution des problématiques de tolérancement. Il existe deux grandes familles de mécanismes : les assemblages en série (dont le traitement sera détaillé dans le chapitre 3) et ceux en parallèle (décrit dans le chapitre 4).

#### III.2.a Assemblage en série : empilage simple

Dans ce type d'architecture, chaque pièce comporte deux surfaces de contact. La condition fonctionnelle s'applique entre une surface de la première pièce et une de la dernière pièce de l'assemblage (fig. 2.20).

On supposera que la condition fonctionnelle limite la position relative des deux surfaces fonctionnelles tolérancées. Elle sera considérée comme respectée si et seulement si ces surfaces fonctionnelles tolérancées sont incluses dans leur zone de tolérance respective. La zone de tolérance peut être définie en prenant une surface ( $1_1$  ou  $n_2$ ) en référence ou par tolérancement en zone de commune des 2 surfaces.

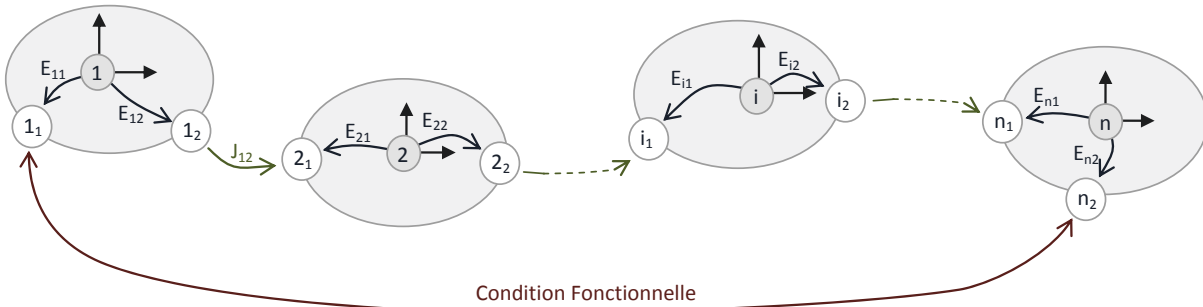


Fig. 2.20 – Exemple d'assemblage en série

Nous appellerons "*domaine écart résultant*", le domaine  $[E]$  représentant l'étendue des variations géométriques engendrées par l'ensemble des écarts au sein du mécanisme. Par composition des déplacements, le torseur écart résultant est  $\{E\} = \{E_{11-n2}\} = \{E_{11-12}\} + \{E_{12-21}\} + \dots + \{E_{i1-i2}\} + \dots + \{E_{n1-n2}\}$ .

#### ◇ Assemblage en série sans jeu

Dans le cas d'un empilage simple sans jeu, la condition fonctionnelle est respectée si et seulement si le domaine écart résultant  $[E]$  est inclus dans le domaine modélisant la condition fonctionnelle  $[C_f]$ .

$$[E] \subset [C_f] \quad (2.24)$$

Le domaine écarts résultant s'obtient en faisant la somme de *Minkowski* [Fukuda 04] de l'ensemble des domaines écarts composant le chemin d'assemblage.

#### ▷ Somme de *Minkowski*

Soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  appartenant respectivement aux domaines convexes  $[D_u]$  et  $[D_v]$  dans l'espace euclidien  $(\vec{x}, \vec{y})$ .

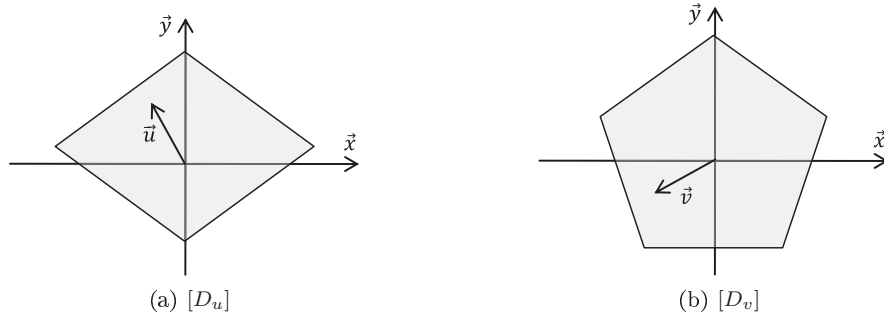


Fig. 2.21 – Domaines convexes définis dans l'espace Euclidien  $(\vec{x}, \vec{y})$

La somme vectorielle  $\vec{u} + \vec{v}$  décrit un domaine  $[D_{u+v}]$  dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ . Ce domaine représente l'ensemble des configurations possibles de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$ . Le domaine  $[D_{u+v}]$  est alors défini comme la somme de *Minkowski* des domaines  $[D_u]$  et  $[D_v]$ .

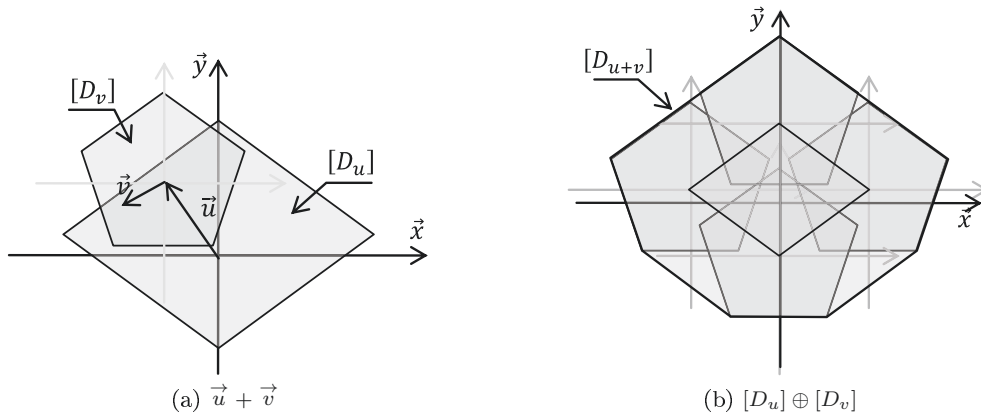


Fig. 2.22 – Illustration de la somme de *Minkowski*  $[D_u] \oplus [D_v]$

La somme de *Minkowski*, tout comme l'addition, est commutative  $[D_u] \oplus [D_v] = [D_v] \oplus [D_u]$ . De plus la somme de *Minkowski* de deux domaines convexes est un domaine convexe.

### ◇ Assemblage en série avec jeu

En fonction du rôle des jeux de liaison, la méthode de traitement des problématiques de tolérancement est différente (cf. § II.1.c). Nous distinguons 3 cas d'étude.

#### ▷ Jeux défavorables

Dans ce cas, la condition fonctionnelle doit être vérifiée pour toutes les configurations de jeux dans les liaisons (cas d'étude formalisé par l'opérateur  $\forall$  dans les travaux de J-Y Dantan). Autrement dit, les jeux ont la même influence que les défauts sur le respect de la condition fonctionnelle. Les domaines jeux seront donc pris en compte au même titre que les domaines écart.

La condition fonctionnelle est donc respectée si et seulement si le domaine somme des *Minkowski* de l'ensemble des écarts et des jeux est inclus dans le domaine représentant la condition fonctionnelle  $[C_f]$ .

Soit  $[J]$  le domaine jeu résultant de la somme de *Minkowski* de l'ensemble des domaines jeux de l'assemblage et  $[E]$  le domaine écart résultant, le respect de la condition fonctionnelle s'écrit donc sous la forme mathématique suivante (eqn. 2.26) :

$$\begin{aligned} \forall \vec{E} \in [E] \text{ et } \forall \vec{J} \in [J] \\ (\vec{E} + \vec{J}) \in [C_f] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Soit l'équation de domaine (eqn. 2.26) :

$$\Rightarrow [E] \oplus [J] \subset [C_f] \quad (2.26)$$

L'utilisation du modificateur de minimum matière se justifie aisément. Si la géométrie est au minimum matière, les jeux sont maximaux donc le domaine jeux est maximal et les domaines écarts correspondent aux tolérances inscrites dans les cadres. Si une surface de liaison n'est pas au minimum de matière, le domaine jeux sera plus petit et le gain sera reporté sur l'écart de sorte que localement la somme des domaines jeux et écarts reste la même.

#### ▷ Jeux favorables

Dans ce cas, la condition fonctionnelle doit être vérifiée pour au moins une configuration de jeux (cas d'étude formalisé par l'opérateur  $\exists$  dans les travaux de J-Y Dantan).

Pour chaque système fabriqué, l'étendue des mobilités de la surface terminale est modélisée par le domaine jeu résultant  $[J]$  décalé du vecteur  $\vec{e}$  somme des écarts  $\vec{e}_i$  de chaque surface de contact "i" (fig. 2.23(a)). Nous appellerons ce domaine, le "domaine jeux décalé"  $[J_d] = [J] + \vec{e}$ .

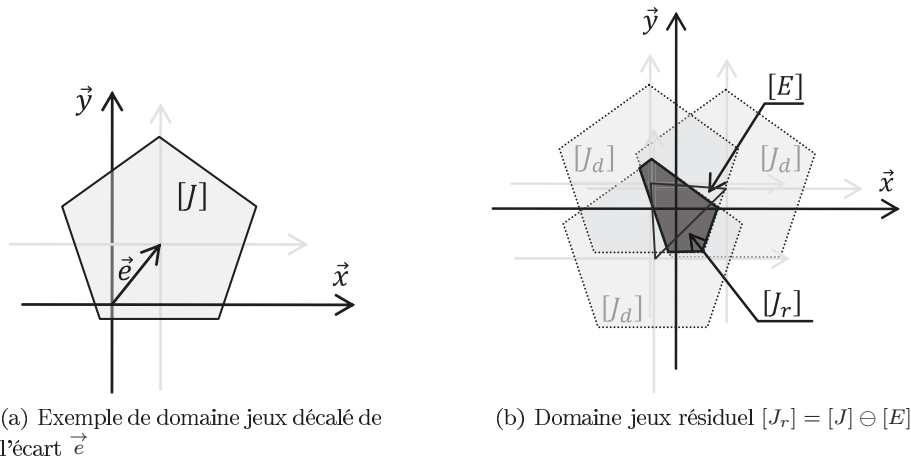


Fig. 2.23 – Opération Sweeping & Intersection "  $\ominus$  "

L'intersection de l'ensemble des domaines jeux décalés  $[J_d]$ , lorsque  $\vec{e}$  parcourt l'ensemble du domaine écarts résultant  $[E]$ , forme un domaine que nous appellerons "*domaine jeux résiduel*"  $[J_r]$  (fig. 2.23(b)). L'opération mathématique consistant à déterminer le domaine jeux résiduel à partir des domaines jeux  $[J]$  et écarts  $[E]$  s'appelle *Sweeping & Intersection* et se note " $\ominus$ ".

$$[J_r] = [J] \ominus [E] = \bigcap_{\vec{e} \in [E]} \left\{ \vec{e} + [J] \right\} \quad (2.27)$$

Le domaine jeux résiduel représente l'ensemble des positions et orientations toujours atteignables par la surface terminale, quels que soient les écarts.

Le respect de la condition fonctionnelle s'écrit donc sous la forme mathématique suivante (eqn. 2.28) :

$$\begin{aligned} \forall \vec{E} \in [E] \\ \exists \vec{J} \in [J] \text{ tel que : } (\vec{E} + \vec{J}) \in [C_f] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Soit l'équation de domaine (eqn. 2.29) :

$$\Rightarrow [J_r] = [J] \ominus [E] \subset [C_f] \quad (2.29)$$

Là encore, l'utilisation du modificateur de maximum de matière peut s'interpréter aisément : Si les dimensions ne sont pas au maximum de matière, on a un gain que l'on reporte sur le domaine écart de sorte que le domaine jeux résiduel reste la même.

#### ▷ Configuration de jeu donnée

Dans ce cas, la condition fonctionnelle doit être respectée dans la configuration de jeu donnée  $\vec{J}_d$ . Le jeu  $\vec{J}_d$  se comporte donc comme un écart qu'il faut ajouter au domaine écart résultant  $[E]$ .

La condition fonctionnelle est respectée si et seulement si le domaine écart résultant  $[E]$  décalé de la configuration de jeu donnée  $\vec{J}_d$  est inclus dans le domaine modélisant la condition fonctionnelle  $[C_f]$ . Mathématiquement cela se traduit par l'équation (eqn. 2.30).

$$\begin{aligned} \text{Pour : } \quad & \vec{J}_d \in [J] \text{ donné} \\ & \forall \vec{E} \in [E] \\ & (\vec{E} + \vec{J}_d) \in [C_f] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Soit l'équation de domaine (eqn. 2.31) :

$$\Rightarrow \vec{J}_d \oplus [E] \subset [C_f] \quad (2.31)$$

### III.2.b Liaisons en parallèle

Nous appellerons "chemin d'assemblage" toute portion d'assemblage en série.

Un assemblage est dit en parallèle lorsqu'il existe plusieurs chemins d'assemblage reliant deux pièces. Un chemin d'assemblage peut être simple (une liaison unique) ou avec des pièces intermédiaires (fig. 2.24)

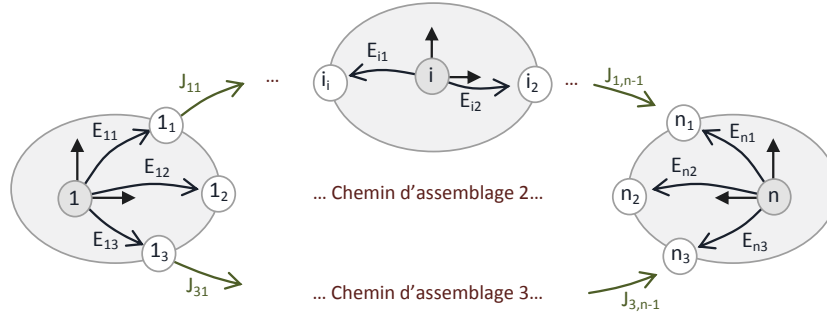


Fig. 2.24 – Graphe générique d'assemblage en parallèle

Cette topologie d'assemblage introduit de nouvelles problématiques géométriques. elle sera étudiée à travers 2 axes :

- **Une condition de montabilité** : Évaluation des jeux à l'intérieur des boucles d'assemblage pour assurer l'assemblage.
- **Une condition de précision** : Position et orientation relative des repères associés aux pièces terminales.

Nous distinguerons deux cas d'études dont le traitement sera plus détaillé dans le chapitre 4.

#### ◊ Boucle simple

Un assemblage en parallèle est dit à boucle simple lorsque les deux pièces communes ne sont reliées que par 2 "chemins d'assemblage" en parallèles.

Dans cette configuration, on retrouve le cas d'étude d'assemblage en série précédent en considérant la condition fonctionnelle de l'empilage comme un chemin d'assemblage.

- La condition de montabilité est équivalente à la condition de respect de la condition fonctionnelle d'un empilage simple avec jeux favorables.
- La condition de précision est vérifiée de la même manière que précédemment en fonction du rôle des jeux dans le mécanisme.

#### ◊ Branches multiples

Lorsque 2 pièces sont reliées par plus de deux chemins d'assemblage, le mécanisme est dit à branches multiples.

##### ▷ Condition de montabilité

Une première approche est de considérer l'assemblage par branches multiples comme plusieurs boucles simples. Dans ce cas, il est nécessaire que chacune des boucles simples de l'assemblage soit montable pour que l'ensemble du mécanisme puisse être assemblé. Cependant, cette condition nécessaire n'est pas suffisante, d'autres approches sont envisageables et seront détaillées dans le chapitre 4.

▷ **Précision**

Pour chaque chemin d'assemblage, l'ensemble des positions et orientations toujours atteignables par la pièce terminale, quels que soient les écarts est décrit par le domaine jeux résiduel. Nous appellerons "*domaine jeux résultant*", le domaine obtenu en faisant l'intersection de l'ensemble de ces domaines jeux résiduels.

Quels que soient les écarts, il existe une configuration de jeux permettant de décrire le positionnement du repère de la pièce terminale par un vecteur inclus dans ce domaine jeux résultant.

De manière similaire on peut calculer un "*domaine d'imprécision*". Pour chaque chemin d'assemblage, on calcule l'ensemble des positions atteignables par la surface terminale (somme de *Minkowski* du domaine écart résultant et des domaines jeux). L'intersection de ces domaines nous donne le domaine "*domaine d'imprécision*".

Ce domaine représente toutes les positions et orientations possibles de la pièce terminale.

### III.3 Manipulation des domaines

Les domaines tels que nous les avons décrits ci-dessus sont définis par un système d'inéquations linéaires entre les composantes de petits déplacements traduisant les mobilités limites d'une entité géométrique et des paramètres géométriques et de tolérancement. Ces déplacements sont limités par une zone de tolérance dans le cas d'un domaine écarts et par la géométrie nominale et la condition d'impénétrabilité de la matière pour les domaines jeux. Cette modélisation par système d'inéquations linéaires dans un espace de dimension 6 désigne un outil mathématique précis : le 6-polytope convexe.

▷ **Définition** : Un sous ensemble  $P$  de  $\mathbb{R}^d$  est appelé *Polyèdre convexe* s'il représente l'ensemble des solutions d'un système fini d'inéquations linéaires. Il est appelé *polytope convexe* s'il désigne un polyèdre convexe et borné [Fukuda 00].

Un polyèdre (respectivement polytope) convexe de dimension  $k$  est appelé *k-polyèdre* (respectivement *k-polytope*).

Nos domaines sont des 6-polytopes que nous appellerons plus simplement polytopes.



### III.3.a Définition duale d'un polytope

Informatiquement, un polytope peut être défini de deux manières [Fukuda 96] :

- **H-représentation** : Chaque inéquation du système définissant le polytope représente un demi hyper-espace limité par un hyper-plan frontière. La H-représentation consiste à définir le domaine convexe par la liste des équations de ses hyper-plans frontières (eqn. 2.32).

$$H - format : \begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & (2 + 1 * X_1 + 0 * X_2 + 0 * X_3 \geq 0) \\ 2 & -1 & 0 & 0 & (2 - X_1 \geq 0) \\ 2 & 0 & 1 & 0 & (2 + * X_2 \geq 0) \\ 2 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 2 & 0 & 0 & 1 & \\ 2 & 0 & 0 & -1 & \end{array} \quad (2.32)$$

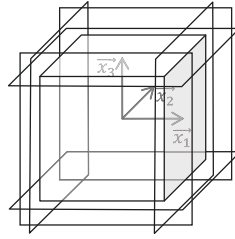


Fig. 2.25 – H-représentation

- **V-représentation** : Le domaine est défini comme l'intersection des demi hyper-espaces limités par des hyper-plans. L'intersection de ces hyper-plans forme les sommets du polytope convexe. La liste des coordonnées de ses sommets est appelée V-représentation (eqn. 2.33)

$$V - format : \begin{array}{c|ccc} 2 & 2 & 2 & (Sommet S_1 (2, 2, 2)) \\ 2 & 2 & -2 & (Sommet S_2 (2, 2, -2)) \\ 2 & -2 & 2 & \dots \\ 2 & -2 & -2 & \\ -2 & 2 & 2 & \\ -2 & 2 & -2 & \\ -2 & -2 & 2 & \\ -2 & -2 & -2 & \end{array} \quad (2.33)$$

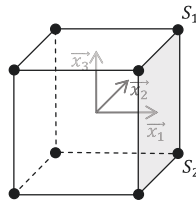


Fig. 2.26 – V-représentation

Le programme *cdd+* développé par Fukuda permet de passer d'une représentation à l'autre.

### III.3.b Découplage de la forme et la taille des polytopes

Dans nos applications, la forme et la taille des domaines peuvent être découplées. En effet, la forme dépend de la nature des surfaces alors que la taille est directement liée aux paramètres géométriques (tolérance ou dimensions).

Il est donc intéressant de retrouver ce découplage dans la représentation des domaines que nous porterons par la suite dans nos méthodes de calcul.

La représentation par les sommets (V-représentation) ou par les hyper-plans (H-représentation) précédente permet de décrire sous forme matricielle la forme de tout type de polytope convexe. Pour chaque représentation on définit la multiplication par un scalaire :

- Soit le domaine  $[D]$  dont la V-représentation est écrite sous la forme matricielle  $D_v$  : La multiplication par un scalaire  $h$  s'applique sur l'ensemble des coordonnées des sommets du polytope.
- Soit le domaine  $[D]$  dont la H-représentation est écrite sous la forme matricielle  $D_h$  : La multiplication par un scalaire  $h$  s'applique uniquement sur les composantes de la première colonne. Les hyper-plans frontières conservent les mêmes normales (coordonnées définies dans les colonnes suivantes).

Ainsi, la multiplication par un scalaire  $h$  conserve la topologie du domaine en le transformant par une homothétie de coefficient  $h$  centrée sur l'origine du domaine.

Un domaine écart  $[E]$  sera donc défini par la valeur  $t$  de la tolérance associée, que multiplie le domaine écart normé  $[e]$  calculé lorsque  $t = 1$  (eqn. 2.34).

$$[E] = t * [e] \quad (2.34)$$

De même, un domaine jeu  $[J]$  sera défini par la valeur  $j$  du jeu nominal de la liaison, que multiplie le domaine jeu normé  $[j]$  calculé lorsque  $j = 1$  (eqn. 2.35).

$$[J] = j * [j] \quad (2.35)$$

Soit pour la liaison cylindre-cylindre de l'exemple précédent (fig. 2.16),  $j = D - d$ .

## IV Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre comment modéliser les variations géométriques au sein d'assemblages tridimensionnels. Ces variations géométriques sont limitées par une zone de tolérance dans le cas de défauts et par la condition d'impénétrabilité de la matière pour les jeux. Les mouvements autorisés à l'intérieur de ces zones sont modélisés par des polytopes convexes, appelés domaines, de dimension inférieure ou égale à 6 (3 rotations et 3 translations).

Les domaines sont donc des outils mathématiques que nous pouvons utiliser dans le traitement de problématiques de tolérancement. Nous verrons dans les chapitres suivants que cette représentation offre d'intéressantes possibilités calculatoires. En effet, au même titre que l'outil torseur (cinématique, cinétique, dynamique et effort) permet de résoudre de manière plus aisée des problèmes de mécanique générale, l'utilisation de l'outil domaine permet de résoudre un grand nombre de problématiques qui sont complexes avec une représentation scalaire.

Ces méthodes varient en fonction de la topologie de l'assemblage. Nous avons recensé différentes familles de bases, composant tous les mécanismes tridimensionnels traités. Chacune d'elles fait appel à des techniques de résolution spécifiques. Nous les avons regroupées en 3 groupes principaux (fig. 2.27). Nous verrons dans le chapitre 3 la résolution des mécanismes en série avec ou sans jeu. Le chapitre 4 traitera du dernier groupe des assemblages avec branches multiples en parallèles.

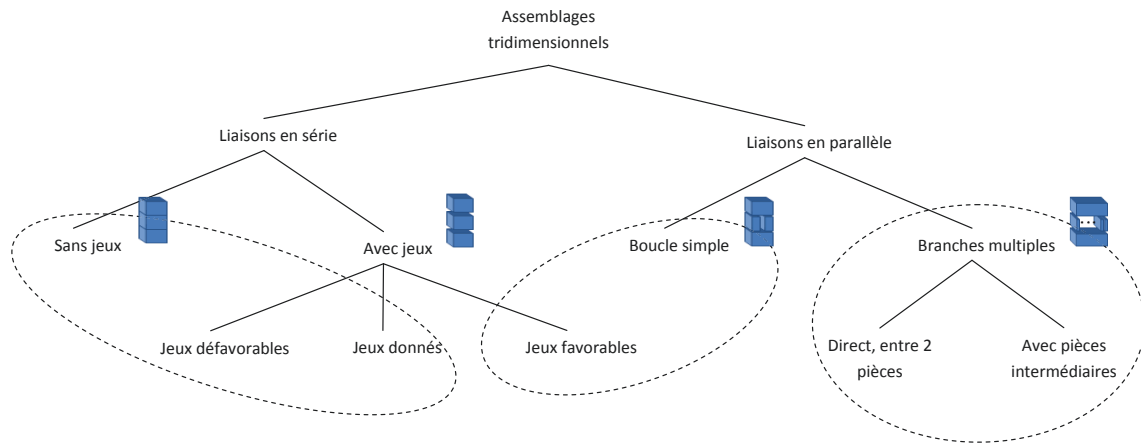
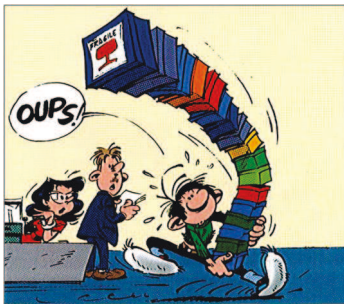


Fig. 2.27 – Décomposition en topologies élémentaires des assemblages tridimensionnels

Dans la mesure où la plupart des mécanismes peuvent être définis comme la composition de ces familles de topologies de base, la résolution passe par le traitement local de chaque sous-partie jusqu'à remonter à la résolution globale.

## Empilage simple



– Empilage de Gaston™ by Franquin

### Objectifs

Ce chapitre présente les méthodes de résolution des problématiques de tolérancement pour les assemblages présentant uniquement des liaisons en série. Dans la mesure où les problématiques de tolérancement qualitatif et quantitatif sont intimement liées, nous proposons des méthodes de calcul permettant de les résoudre simultanément pour cette topologie d'assemblage. La modélisation par l'outil domaine permettra de démontrer la linéarité par morceaux des équations de tolérancement. Ces relations seront générées à partir de la seule définition de la géométrie de l'assemblage avec le concept de coefficient d'influence. Enfin, nous verrons comment utiliser nos résultats pour optimiser le tolérancement global d'un système mécanique tridimensionnel.

## I Mise en situation

### I.1 Assemblage

Les assemblages composés uniquement de liaisons en série sont appelés "empilages simples". Chaque pièce  $p$  comporte 2 surfaces  $s$  de liaison. En négligeant les défauts de forme, ces surfaces présentent des écarts géométriques modélisés par des petits déplacements de solide rigide  $E_{ps}$ . Le contact entre deux surfaces appartenant à deux pièces différentes  $i$  et  $i + 1$  se fait avec ou sans jeu  $j_{i,i+1}$ .

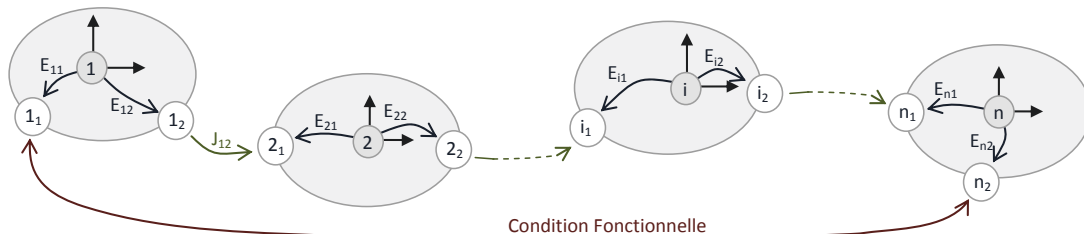


Fig. 3.2 – Topologie générique de graphe d'assemblage en série

La condition fonctionnelle s'applique entre la surface initiale et la surface terminale du mécanisme. Pour une structure composée de  $n$  pièces numérotées de 1 à  $n$ , la condition fonctionnelle est définie entre les surfaces  $1_1$  et  $n_2$  (fig. 3.2).

## I.2 Condition fonctionnelle

Ce type de montage ne présente pas de degré d'hyperstatisme. L'étude de la condition de montabilité est alors évidente. Par la suite, nous nous intéresserons à la condition fonctionnelle concernant la position d'une surface par rapport à une autre. Cette exigence géométrique est exprimée à l'aide du tolérancement par zone conformément à la norme internationale [NF-EN-ISO-1101 06, ISO-8015 85]. Elle peut être modélisée de différentes manières :

- Par une zone de tolérance sur une surface mise en position par rapport à l'autre surface prise en référence.
- Par le tolérancement des deux surfaces en zone commune.

Nous appellerons  $t_{cf}$  la valeur de la tolérance associée à cette condition fonctionnelle. Un domaine condition fonctionnelle  $[C_f] = t_{cf} * [c_f]$  modélise, de la même manière qu'un domaine écart, les mouvements de la surface fonctionnelle à l'intérieur de sa zone de tolérance fonctionnelle associée.

## I.3 Défauts et mobilités internes

Le respect de la condition fonctionnelle dépend des défauts et mobilités au sein de chaque liaison de l'assemblage. Afin de pouvoir utiliser l'outil domaine, nous nous placerons dans les hypothèses de petits déplacements de solides rigides. Par conventions, ceux-ci seront modélisés par le torseur de petits déplacements suivant (eqn. 3.1) :

$$\{T(M)\}_{b_0} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} = \\ \left| \begin{array}{c} r_x \\ r_y \\ r_z \end{array} \right|_{b_0} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \vec{\delta}_M = \\ \left| \begin{array}{c} t_x \\ t_y \\ t_z \end{array} \right|_{b_0} \end{array} \right\}_{b_0} \quad (3.1)$$

### I.3.a Jeux

Les jeux sont limités par les dimensions géométriques des surfaces de contact et par la condition d'impénétrabilité de la matière. Pour chaque liaison, ils sont évalués à partir de la géométrie nominale et modélisés sous forme d'un domaine jeu de type  $[J] = j * [j]$ .

### I.3.b Défauts géométriques

Les défauts géométriques des surfaces de liaison sont limités par le tolérancement. Ils sont définis par les écarts de position et d'orientation entre le repère lié à la surface de substitution et celui lié à la surface nominale. Le domaine écarts, de la forme :  $[E] = t * [e]$ , représente l'ensemble des positions de la surface de substitution à l'intérieur de sa zone de tolérance de valeur de tolérance  $t$ .

Avec cette modélisation, on ne prend volontairement pas en compte les défauts de forme. Leur influence pourrait être prise en compte en définissant un domaine écart de contact [Adragna 10] injecté dans la méthode de calcul décrite ci-après.

Dans le cas d'empilage simple, il n'existe qu'un seul chemin d'assemblage. La zone de tolérance de chaque surface de liaison possède donc les mêmes degrés de liberté que celle définissant la condition fonctionnelle. De plus, chaque pièce n'est composée que de deux surfaces de contact. Le tolérancement des pièces ne peut donc être défini que par tolérancement en zone commune ou avec une surface en référence.

Il est possible de modéliser l'influence du tolérancement en s'affranchissant de sa définition qualitative (type de spécification géométrique utilisée). A chaque surface  $s$  d'une pièce  $p$  est associée une zone de

tolérance de même degrés de liberté que la zone de tolérance fonctionnelle, de forme et position déterminées par la nature de l'entité tolérancée et de largeur  $t_{ps}$ . Si la surface est prise en référence, sa valeur  $t_{ps}$  sera fixée à 0. Et si le tolérancement de la pièce est défini en zone commune les valeurs  $t_{p1}$  et  $t_{p2}$  seront égales.

Les problèmes de tolérancement qualitatif et quantitatif sont étroitement liés, c'est pourquoi ils ne peuvent pas être traités indépendamment l'un de l'autre comme cela a été le cas jusqu'à présent. La modélisation originale en "zone liées" décrite ci-dessus sur chaque surface de liaison permet la résolution simultanée de ces 2 problématiques, et rend ainsi possible l'optimisation globale du tolérancement d'un assemblage de type empilage simple.

### I.3.c Respect de la condition fonctionnelle

Nous proposons une méthode de calcul originale, basée sur la modélisation par l'outil domaine, afin d'obtenir la condition de respect de l'exigence fonctionnelle sous la forme d'un système d'équations linéaires. Ces relations linéaires relient la valeur de la tolérance fonctionnelle  $t_{cf}$  aux tolérances  $t_{ps}$  de chaque surface  $s$  appartenant aux pièces  $p$  et aux jeux de liaison  $j_{i,i+1}$  entre les pièces  $i$  et  $i + 1$ . Les coefficients  $c_{ps}$  et  $c_{i,i+1}$  sont appelés "coefficients d'influence" (eqn. 3.2) :

$$t_{cf} = \sum c_{ps} * t_{ps} + c_{i,i+1} * j_{i,i+1} \quad (3.2)$$

Cette relation est bien connue dans le calcul de chaînes de cotes unidirectionnelles. Dans le cas tridimensionnel, B. Anselmetti note que l'étude des cas simples permet de déterminer cette relation, mais reconnaît la difficulté à l'obtenir pour des cas plus généraux [Anselmetti 03b]. Un exemple plus complexe, où les coefficients d'influence sont calculés analytiquement, est traité par Jian et al. [Jian 05]. Mais à notre connaissance les conditions précises pour lesquelles cette relation linéaire est valable et une méthode de détermination systématique des coefficients dans le cas général n'ont jamais été explicitées.

Nous montrerons que la valeur de ces coefficients d'influence  $c_{ps}$  dépend, dans le cas général, de la répartition des tolérances  $t_{ps}$  choisie. En effet, dans les hypothèses d'études adaptées à la modélisation par polytopes convexes, cette relation est linéaire par morceaux.

Nous avons vu dans le chapitre 2 (cf. § III.2) que les assemblages de type empilage simple pouvaient être décomposés en sous famille : avec ou sans jeu. Dans un premier temps, nous étudierons les méthodes de résolution du tolérancement des mécanismes, présentant uniquement des liaisons en série sans jeu.

## II Assemblage en série sans jeu

Nous commencerons par étudier les mécanismes de type empilage simple sans jeu. Cette topologie d'assemblage est la plus basique que nous ayons recensée. Notre méthode de calcul, basée sur l'utilisation de l'outil domaine, s'étoffera ensuite en complexifiant les mécanismes traités.

### II.1 Mise en équations du problème de tolérancement

#### II.1.a Chaîne de cotes

Avec la modélisation de l'assemblage définie précédemment (fig. 3.2), et en considérant  $C_f$  le torseur écart de la surface fonctionnelle résultant de l'assemblage et  $E_{ps}$  le torseur écart de la surface  $s$  de la pièce  $p$ , on obtient pour un mécanisme de  $n$  pièces, la relation torsorielle suivante (eqn. 3.3) :

$$C_f = -E_{11} + E_{12} - \dots - E_{n1} + E_{n2} \quad (3.3)$$

Avec cette modélisation, aucune spécification n'est fixée (type de spécification et référence éventuelle). La nature des surfaces fonctionnelles définira le type de spécification. Et l'optimisation du système d'équations définira les surfaces à prendre en référence et à spécifier ainsi que la valeur des tolérances associées.

La résolution du tolérancement qualitatif et quantitatif doit se faire de manière simultanée pour obtenir le tolérancement global optimal.

Pour illustrer notre propos, nous nous appuyerons sur l'exemple didactique suivant (fig. 3.1) :

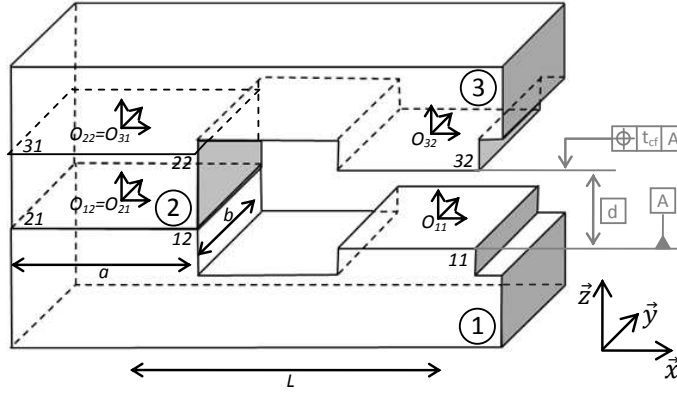


Fig. 3.3 – Exemple didactique d'empilage simple sans jeu

Chaque pièce  $p$  comporte 2 surfaces de contact,  $p1$  et  $p2$ , que nous laisserons libres de comporter ou non des défauts de fabrication, respectivement modélisés par les torseurs écarts  $E_{p1}$  et  $E_{p2}$ . La relation torsorielle de fermeture de chaîne précédente (eqn. 3.3) s'écrit donc dans notre exemple sous la forme (eqn. 3.4) :

$$C_f = -E_{11} + E_{12} - E_{21} + E_{22} - E_{31} + E_{32} \quad (3.4)$$

Chaque surface doit appartenir à sa zone de tolérance. En terme de domaine cela se traduit par : Pour tout écart  $E_{ps}$  appartenant au domaine  $[E_{ps}]$ ,  $C_f$  doit appartenir au domaine fonctionnel  $[C_f]$ . La condition fonctionnelle sera donc respectée si et seulement si le domaine écart résultant de la somme de *Minkowski* des domaines écarts, relatifs aux 6 torseurs écarts  $E_{ps}$ , est contenu dans le domaine condition fonctionnelle  $[C_f]$ .

### II.1.b Conditions fonctionnelles élémentaires

La condition fonctionnelle est modélisée sous la forme d'une zone de tolérance dans laquelle doit rester la surface fonctionnelle réelle tolérancée. Dans le cas d'un empilage simple, la condition fonctionnelle s'applique entre deux surfaces. Les degrés de liberté de la zone de tolérance associée sont donc définis par les degrés d'invariance de l'association de ces deux surfaces. De même, la forme de la zone de tolérance est fixée par la nature des surfaces fonctionnelles.

Dans notre exemple, la condition fonctionnelle s'applique entre les deux surfaces planes parallèles 11 et 32. Avec la modélisation en "zones liées", une zone de tolérance est associée à chacune de ces deux surfaces fonctionnelles. De par leur nature, leur zone de tolérance est limitée par deux plans parallèles distants de la valeur de la tolérance, respectivement  $t_{11}$  et  $t_{32}$  tels que  $t_{11} + t_{32} = t_{cf}$  (avec  $t_{cf}$  la valeur de la tolérance fonctionnelle). La position relative de ces deux zones de tolérance est fixée par une distance théorique exacte entre leur plan médian.

Dans notre cas d'étude, par exemple, la surface 11 est prise en référence. La tolérance  $t_{11}$  et le torseur écart  $E_{11}$  associés à cette surface sont donc nuls. La zone de tolérance de la surface 32 de largeur  $t_{32} = t_{cf}$  est mise en position par rapport à la surface de référence 11. Étant donnés les degrés d'invariance de l'association des surfaces fonctionnelles 11 et 32, le torseur écart  $E_{32}$  est de la forme (eqn. 3.5) :

$$E_{32} = \left\{ \begin{array}{cc} r_x & 0 \\ r_y & 0 \\ 0 & t_z \end{array} \right\}_{O_{32}} \quad (3.5)$$

La surface de substitution construite à partir de la surface réelle tolérancée 32 doit rester à l'intérieur de sa zone de tolérance associée. En limitant ses petits déplacements, nous obtenons un système d'inéquations portant sur les composantes du torseur écarts. Ce système d'inéquations caractérise les défauts admissibles et peut être modélisé dans un espace de dimension inférieure ou égale à 6, sous forme de polytope convexe où chaque inéquation représente un demi hyper-espace du domaine.

Soient  $a$  et  $b$  les longueurs de la surface tolérancée 32 suivant les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ .

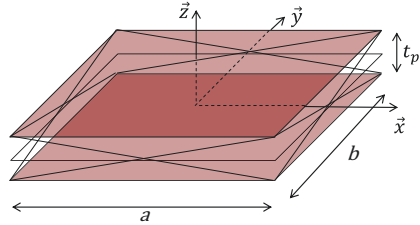


Fig. 3.4 – Petits déplacements de la surface 32 dans sa zone de tolérance associée

La limitation des petits déplacements de la surface 32 dans sa zone de tolérance (fig. 3.4) nous donne le système de 8 inéquations suivantes (eqn. 3.6) :

$$\frac{t_{cf}}{2} \geq \epsilon_1 * t_z + \epsilon_2 * \frac{b}{2} * r_x + \epsilon_3 * \frac{a}{2} * r_y \quad \epsilon_i = \pm 1 \quad (3.6)$$

Chacune de ces inéquations représente un hyper-plan frontière du domaine. Dans le cas général, afin de permettre la manipulation des domaines, ces relations doivent être du premier degré. Le cas échéant, nous procéderons à une facétisation suivant les hypothèses décrites dans le chapitre précédent (cf. chapitre 2). De la même manière, les inéquations relatives aux contraintes surabondantes seront supprimées.

Par la suite, le domaine condition fonctionnelle sera défini par l'ensemble de ses surfaces frontières (H-représentation). La condition d'appartenance à chacun des demi hyper-espaces limité par une surface frontière est appelée condition fonctionnelle élémentaire  $H_i$ . Une condition fonctionnelle élémentaire est donc définie par une inéquation de la forme (eqn. 3.7) :

$$H_i : t_{cf,i} \geq \sum_{j=1}^6 a_{i,j} . x_j \quad (3.7)$$

Avec :  $x_j$  la  $j^{eme}$  composante du torseur de petits déplacements.

Le respect de la condition fonctionnelle passe par le respect de l'ensemble de ses conditions fonctionnelles élémentaires, et donc par chacune des inéquations  $H_i$  les définissant.

Dans notre exemple, le domaine "condition fonctionnelle"  $[C_f]$  est défini au point  $O_{32}$ , centre de la surface 32 par l'ensemble des conditions fonctionnelles élémentaires suivantes (eqn. 3.8) :

$$[C_f]_{O_{32}} = \begin{cases} H_1 : t_{cf} \geq 2.t_z + b.r_x - a.r_y \\ H_2 : t_{cf} \geq -2.t_z - b.r_x + a.r_y \\ H_3 : t_{cf} \geq 2.t_z + b.r_x + a.r_y \\ H_4 : t_{cf} \geq -2.t_z - b.r_x - a.r_y \\ H_5 : t_{cf} \geq 2.t_z - b.r_x + a.r_y \\ H_6 : t_{cf} \geq -2.t_z + b.r_x - a.r_y \\ H_7 : t_{cf} \geq 2.t_z - b.r_x - a.r_y \\ H_8 : t_{cf} \geq -2.t_z + b.r_x + a.r_y \end{cases} \quad (3.8)$$



Sa représentation graphique dans un espace de dimension 3 ( $t_z, r_x, r_y$ ) est illustrée ci-après (fig. 3.5) :

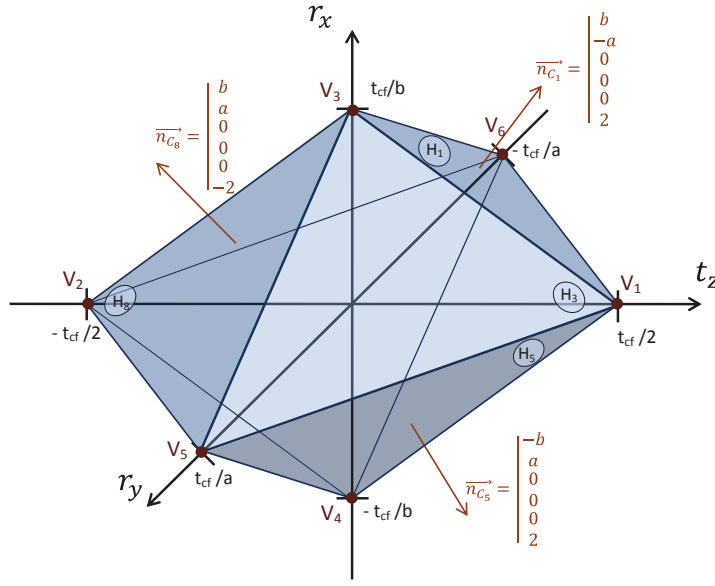


Fig. 3.5 – Représentation graphique du domaine condition fonctionnelle appliquée sur la surface plane rectangulaire ( $a*b$ ) 32

### II.1.c Domaines écarts

De la même manière, nous associons pour chaque surface  $s$  de chaque pièce  $p$  du mécanisme une zone de tolérance de taille paramétrée par la valeur de la tolérance  $t_{ps}$ . La forme de chaque zone de tolérance est définie par la nature de la surface  $ps$  et est de même degré de liberté que celle associée à la condition fonctionnelle.

En limitant les petits déplacements de la surface de substitution à l'intérieur de sa zone de tolérance, nous obtenons le domaine écart de la surface  $ps$  ( $[E_{ps}] = t_{ps} * [e_{ps}]$ ).

Par la suite, les domaines écarts seront définis par les coordonnées de leurs sommets  $V_k$ , intersection des hyper-plans frontières des demi hyper-espaces définis précédemment par les inéquations limitant les petits déplacements (V-représentation). Afin de distinguer les équations d'hyper-plans frontières des inéquations des demi hyper-espaces, nous appellerons  $G_i$  l'équation définissant l'hyper-plan frontière du demi hyper-espace  $H_i$  (remplacement du signe " $\geq$ " par le signe " $=$ ").

Soit  $v_{ps,j,k}$  la  $j^{eme}$  coordonnée du  $k^{eme}$  sommet du domaine écart normé  $[e_{ps}]$  défini lorsque  $t_{ps} = 1$ , les coordonnées  $V_{ps,j,k}$  du domaine écarts  $[E_{ps}]$  sont données par la relation suivante (eqn. 3.9) :

$$V_{ps,j,k} = t_{ps} * v_{ps,j,k} \quad (3.9)$$

Soit  $d$  la dimension du domaine écarts  $[E_{ps}]$ ,  $d$  variables indépendantes sont nécessaires pour le décrire. Ces variables correspondent aux composantes d'écarts indépendantes mesurables. La dimension  $d$  est donc égale à 6, duquel on soustrait le nombre de degrés de liberté de la zone de tolérance associée. Les coordonnées des sommets du domaine écarts  $[E_{ps}]$  s'obtiennent en calculant l'intersection de  $d$  de ses hyper-plans frontières (chaque sommet est solution d'un système de  $d$  équations à  $d$  inconnues). Pour un domaine écarts  $[E_{ps}]$  défini par  $n$  hyper-plans frontières, il existe donc  $C_n^d$  systèmes d'équations à inverser (avec  $C_n^d$  le nombre de combinaisons de  $d$  parmi  $n$ ). Si l'intersection existe (système inversible) et donne une solution unique, un test d'appartenance à l'ensemble des demi hyper-espaces définissant le domaine écarts permet de sélectionner parmi les  $C_n^d$  points potentiels, les sommets du domaine écarts  $[E_{ps}]$ .

Dans notre exemple, le domaine écarts  $[E_{ps}]$  défini au point  $O_{ps}$  centre de la surface rectangulaire ( $a*b$ ) est de dimensions 3 (fig. 3.5). Ses sommets sont donc solutions de systèmes formés de 3 équations d'hyper-plans frontières  $G_i$  parmi les 8 définissant le domaine écarts. Il existe donc  $C_8^3 = 56$  systèmes d'équations potentiels. En supprimant les systèmes ne donnant pas de solution unique (la composition des hyper-plans  $G_1, G_2, G_3$  par exemple) et en enlevant les points surabondants (points doublons comme les systèmes  $G_1, G_3, G_8$  et  $G_1, G_6, G_8$  par exemple) et/ou en dehors du domaine écart (le système  $G_1, G_5, G_8$  par exemple), nous obtenons 6 sommets  $V_{ps,i}$ . La V-représentation du domaine écarts  $[E_{ps}]_{O_{32}}$  est donc donnée par l'équation suivante (eqn. 3.10)

$$[E_{ps}]_{O_{ps}} = t_{ps} * \left[ \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{Bmatrix}}_{V_{ps,1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{Bmatrix}}_{V_{ps,2}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 1/b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{ps,3}} \underbrace{\begin{Bmatrix} -1/b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{ps,4}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 1/a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{ps,5}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -1/a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{ps,6}} \right]_{O_{ps}} \quad (3.10)$$

## II.2 Nouvelle méthode de calcul

La condition fonctionnelle de ce type d'assemblage est respectée au pire des cas si et seulement si la somme de *Minkowski* de l'ensemble des domaines écarts  $[E_i]$  est incluse dans le domaine condition fonctionnelle  $[C_f]$  lorsque tous les domaines sont définis au même point.

$$\sum_i [E_i]_{O_{Cf}} \subset [C_f]_{O_{Cf}} \quad (3.11)$$

La somme de *Minkowski* de deux polytopes convexes peut être obtenue par l'enveloppe convexe contenant l'ensemble des points du second lorsque son origine se déplace sur l'ensemble des sommets du premier (fig. 3.6).

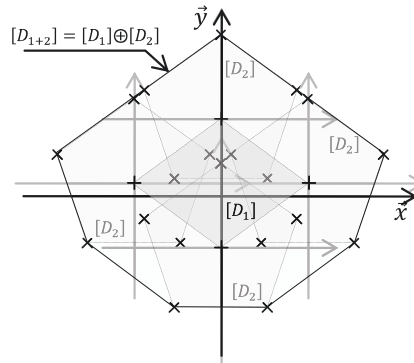


Fig. 3.6 – Somme de *Minkowski* de deux domaines :  $[D_1] \oplus [D_2]$

La complexité de calcul croit donc de manière exponentielle avec le nombre de domaines (pour  $n$  domaines à  $m$  sommets, nous calculons  $m^n$  points).

### II.2.a Détermination des coefficients d'influence

Afin d'alléger la complexité de calcul, nous proposons de prendre en compte, pour chaque domaine écart, uniquement la situation (le sommet) le plus défavorable au respect de la condition fonctionnelle élémentaire et non plus l'ensemble des sommets. Ce concept a déjà été introduit dans de précédentes études : B. Anselmetti [Anselmetti 06] considère chaque condition fonctionnelle élémentaire, c'est à dire, chaque inéquation  $H_i$  et recherche la direction d'analyse défavorable. O.W. Salomons [Salomons 96a] utilise également ce principe dans l'analyse de jeux fonctionnels suivant une direction donnée.

Pour chaque domaine écarts  $[E_{ps}]_{O_{Cf}}$  défini au point  $O_{Cf}$  centre de la surface fonctionnelle, nous cherchons la valeur minimale de la tolérance  $t_{cf,i,ps}$  permettant le respect au pire des cas de la condition fonctionnelle élémentaire  $H_i$ . Cette valeur est obtenue lorsque l'hyper-plan frontière  $G_i$  passe par le sommet le plus défavorable du domaine écarts.

Cette méthode revient donc à rechercher le sommet le plus défavorable vis-à-vis d'une condition fonctionnelle élémentaire puis à évaluer sa distance relative.

Soit  $V_{ps,k}$  le  $k^{eme}$  sommet du domaine écarts  $[E_{ps}]$ , d'après l'équation (eqn. 3.7), l'équation de l'hyper-plan frontière  $G_i$  passant par le sommet  $V_{ps,k}$  du domaine écarts  $[E_{ps}]$  est donnée par (eqn. 3.12) :

$$G_i : t_{cf,i,k} = \sum_{j=1}^6 a_{i,j} * V_{ps,j,k} \quad (3.12)$$

L'exigence fonctionnelle élémentaire  $H_i$  est respectée si est seulement si le domaine écarts  $[E_{ps}]$  est totalement inclus dans celle-ci. L'hyper-plan frontière  $G_i$  relatif à la condition fonctionnelle élémentaire  $H_i$  se translate suivant sa normale proportionnellement à la valeur de son paramètre de taille  $t_{cf,i}$  (fig. 3.7). Le sommet le plus défavorable au respect de la condition fonctionnelle élémentaire  $H_i$  sera celui qui exige la plus grande dimension du domaine condition fonctionnelle élémentaire (afin de permettre l'inclusion de tous les autres sommets). Nous appellerons  $t_{cf,i,ps}$  la plus grande valeur du paramètre  $t_{cf,i}$  lorsque l'on fait passer l'hyper-plan frontière  $G_i$  par l'ensemble des sommets du domaine écarts  $[E_{ps}]$ .

$$t_{cf,i,ps} = \max_k \{t_{cf,i,k}\} = \max_k \left\{ \sum_{j=1}^6 a_{i,j} * V_{ps,j,k} \right\} \quad (3.13)$$

Nous obtenons ainsi le sommet du domaine écarts  $[E_{ps}]$  correspondant à la configuration la plus défavorable au respect de la condition fonctionnelle élémentaire  $H_i$  (fig. 3.7). Ce résultat est équivalent à l'obtention des points de contact au sein de la liaison correspondant au déplacement maximal dans une direction d'analyse  $\vec{f}$ , obtenu par la méthode CLIC de B. Anselmetti [Anselmetti 05].

$t_{cf,i,ps}$ , correspond à la valeur minimale de la tolérance fonctionnelle  $t_{cf}$  permettant le respect au pire des cas de la condition fonctionnelle élémentaire  $H_i$  par le domaine écarts  $[E_{ps}]$  seul.

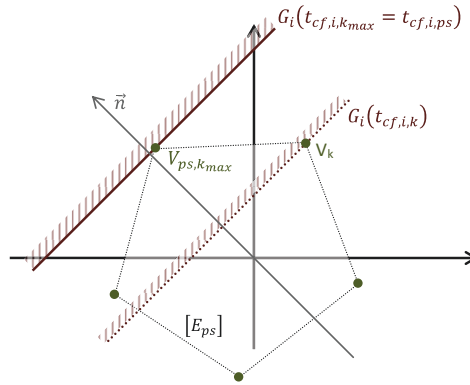


Fig. 3.7 – Illustration de la recherche du sommet  $V_{ps,k_{max}}$  défavorable

Dans le cas d'un assemblage, de par les propriétés de la somme de *Minkowski*, le sommet de la somme, le plus éloigné dans une direction donnée est égal à la somme des sommets les plus éloignés dans cette direction (fig. 3.14). La configuration la plus défavorable au respect d'une condition fonctionnelle élémentaire correspond donc à la somme des configurations les plus défavorables de chaque liaison [Teissandier 11].

Pour chaque domaine écarts  $[E_{ps}]$  composant le mécanisme, la configuration la plus défavorable correspond au sommet identifié par la méthode précédemment décrite. La condition fonctionnelle élémentaire  $H_i$  est respectée au pire des cas si la somme de ces configurations défavorables est incluse dans le demi hyper-espace  $H_i$  (eqn. 3.14c) :

$$t_{cf} \geq \sum_{ps} t_{cf,i,ps} \quad (3.14a)$$

$$t_{cf} \geq \sum_{ps} \max_k \left\{ \sum_{j=1}^6 a_{i,j} \cdot V_{ps,j,k} \right\} = \sum_{ps} \underbrace{\max_k \left\{ \sum_{j=1}^6 a_{i,j} \cdot v_{ps,j,k} \right\}}_{c_{i,ps}} * t_{ps} \quad (3.14b)$$

$$\Rightarrow t_{cf} \geq \sum_{ps} c_{i,ps} * t_{ps} = t_{cf,i} \quad (3.14c)$$

$c_{i,ps}$  sera appelé coefficient d'influence de la surface de liaison  $ps$  sur la condition élémentaire  $H_i$ . Ce résultat est équivalent aux coefficients d'influence obtenus dans la méthode CLIC de B. Anselmetti [Anselmetti 05] à la différence près que nous en avons ici une démonstration rigoureuse, avec les conditions de validité, ainsi qu'une méthode systématique de calcul (cf. § II.2.c).

### II.2.b Respect de la condition fonctionnelle

En effectuant le calcul sur chacune des conditions fonctionnelles élémentaires  $H_i$ , nous obtenons l'ensemble des inéquations linéaires traduisant le respect au pire des cas de la condition fonctionnelle (eqn. 3.15) :

$$\forall i, \quad t_{cf} \geq t_{cf,i} = \sum_{ps} c_{i,ps} * t_{ps} \quad (3.15)$$

Dans notre exemple, nous obtenons pour les 8 conditions fonctionnelles élémentaires  $H_i$  :

$$H_i : t_{cf} \geq c_{i,11} * t_{11} + c_{i,12} * t_{12} + c_{i,21} * t_{21} + c_{i,22} * t_{22} + c_{i,31} * t_{31} + c_{i,32} * t_{32} \quad (3.16)$$

Soit, en faisant l'hypothèse que  $\frac{2.L}{a} > 1$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_1, H_2, H_7, H_8 : & t_{cf} \geq 1 * t_{11} + \alpha_1 * t_{12} + \alpha_1 * t_{21} + \alpha_1 * t_{22} + \alpha_1 * t_{31} + 1 * t_{32} \\ H_3, H_4, H_5, H_6 : & t_{cf} \geq 1 * t_{11} + \alpha_2 * t_{12} + \alpha_2 * t_{21} + \alpha_2 * t_{22} + \alpha_2 * t_{31} + 1 * t_{32} \\ & \alpha_1 = \frac{2.L}{a} - 1 \\ & \alpha_2 = \frac{2.L}{a} + 1 \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Dans ce cas particulier, quelle que soit la répartition des tolérances  $t_{ps}$ , la condition  $H_i$  limitante est toujours la même. La condition de respect de l'exigence fonctionnelle est donc (eqn. 3.18) :

$$t_{cf} \geq 1 * t_{11} + \left( \frac{2.L}{a} + 1 \right) * t_{12} + \left( \frac{2.L}{a} + 1 \right) * t_{21} + \left( \frac{2.L}{a} + 1 \right) * t_{22} + \left( \frac{2.L}{a} + 1 \right) * t_{31} + 1 * t_{32} \quad (3.18)$$

Cette relation ne prend pas en compte le tolérancement qualitatif du mécanisme. Une zone de tolérance de largeur  $t_{ps}$  est associé à chaque surface  $ps$  de liaison. Ce résultat permet d'optimiser de manière simultanée le tolérancement qualitatif et quantitatif. En effet, en fonction des coefficient d'influence affecté à chaque tolérance  $t_{ps}$ , nous choisirons le système de spécification optimal (les tolérances affectées aux surfaces prises en référence seront fixées à 0 et seuls les valeurs des tolérances des surface spécifiées sont conservées)(cf. § II.2.c).

En fonction de la condition fonctionnelle élémentaire  $H_i$  considérée, les coefficients d'influence  $c_{i,ps}$  ne sont pas nécessairement égaux (sommet limitant différent).

Dans le cas général, le problème étant indéterminé, la condition fonctionnelle élémentaire la plus défavorable et donc l'inéquation limitante dépendent du choix de répartition des tolérances  $t_{ps}$ . C'est pourquoi l'ensemble des conditions fonctionnelles élémentaires doivent être prises en compte. La condition de respect de l'exigence fonctionnelle est donc linéaire par morceaux par rapport aux tolérances de chaque surface de liaison  $t_{ps}$ .

#### ◇ Illustration de la linéarité par morceaux

Cette linéarité par morceaux peut être mise en évidence sur un exemple didactique. Prenons l'assemblage suivant (fig. 3.8). Nous supposons l'entretoise sans défaut et l'assemblage des deux pièces tolérancées, sans jeux :

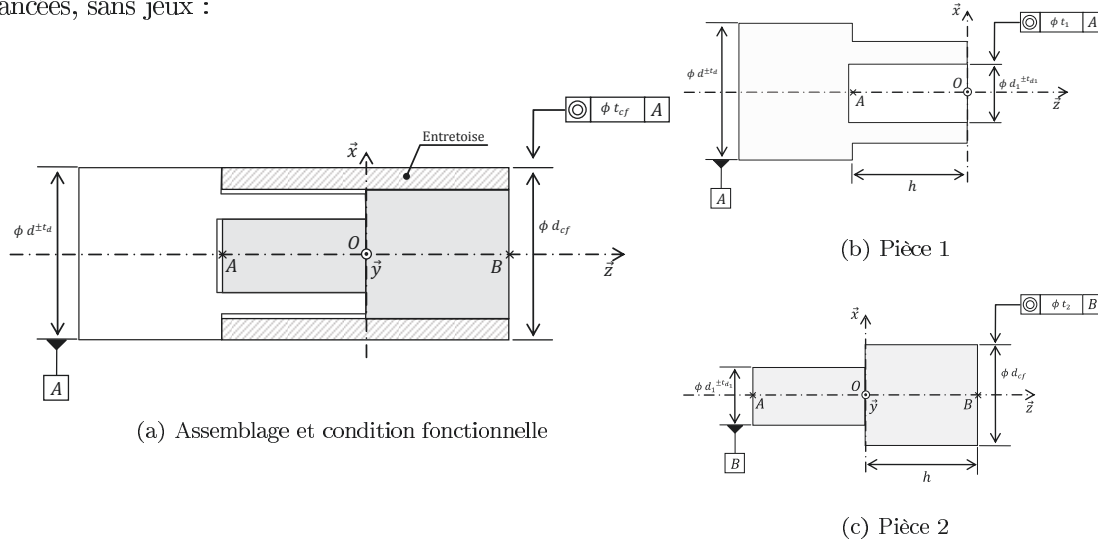


Fig. 3.8 – Exemple didactique de tolérancement illustrant la linéarité par morceaux

Ce mécanisme est axisymétrique suivant l'axe  $\vec{z}$ . Max Giordano a démontré que dans ces conditions, l'étude de ce système au pire des cas, peut être ramené à un problème plan dont un des axes est l'axe de symétrie [Giordano 07].

Dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ , les degrés de liberté des zones de tolérance affectées aux axes des surfaces supposées cylindriques et à l'exigence fonctionnelle sont donc  $r_y$  et  $t_x$ . L'ensemble des domaines associés seront définis au point  $O$ , centre de l'assemblage.

#### ▷ Modélisation de la condition fonctionnelle

La zone de tolérance affectée à la condition fonctionnelle est un cylindre de diamètre  $t_{cf}$  et de longueur  $2 * h$  dans lequel doit être inclus l'axe de l'entretoise supposée parfaite.

En limitant les petits déplacements des points extrêmes  $A$  et  $B$ , nous obtenons le système d'inéquations définissant le domaine condition fonctionnelle  $[C_f]_O$  (eqn. 3.19).

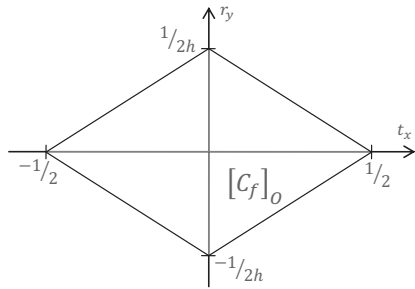


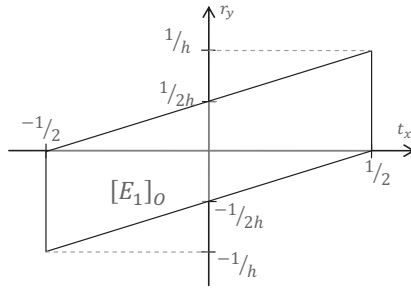
Fig. 3.9 –  $[C_f]_O$

$$[C_f]_O = \begin{cases} H_1 : t_{cf} \geq 2 * h * r_y + 2 * t_x \\ H_2 : t_{cf} \geq -2 * h * r_y - 2 * t_x \\ H_3 : t_{cf} \geq -2 * h * r_y + 2 * t_x \\ H_4 : t_{cf} \geq 2 * h * r_y - 2 * t_x \end{cases} \quad (3.19)$$

### ▷ Modélisation des domaines écarts

Les zones de tolérance associées à chacune des deux surfaces  $s$  tolérancées sont des cylindres de diamètre  $t_s$  et de longueur  $h$  dans lesquels doivent être inclus chacun des axes des surfaces supposées cylindriques  $s$ .

- En limitant les petits déplacements des points  $A$  et  $O$ , nous obtenons un système d'inéquations définissant le domaine écarts  $[E_1]_O$  de l'axe de la surface tolérancée, supposée cylindre, de la pièce nommée 1 (eqn. 3.20).



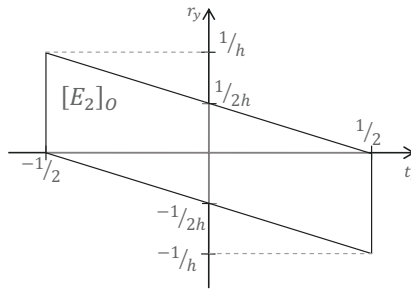
$$[E_1]_O = \begin{cases} t_{cf} \geq -2 * h * r_y + 2 * t_x \\ t_{cf} \geq 2 * h * r_y - 2 * t_x \\ t_{cf} \geq 2 * t_x \\ t_{cf} \geq -2 * t_x \end{cases} \quad (3.20)$$

Fig. 3.10 –  $[E_1]_O$

Soit la V-représentation (eqn. 3.21) :

$$[E_1]_O = t_1 * \left[ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\quad}_{V_{1,1}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/h \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\quad}_{V_{1,2}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\quad}_{V_{1,3}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/h \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\quad}_{V_{1,4}} \end{array} \right]_O \quad (3.21)$$

- De même, en limitant les petits déplacements des points  $O$  et  $B$ , nous obtenons un système d'inéquations définissant le domaine écarts  $[E_2]_O$  de l'axe de la surface tolérancée, supposée cylindre, de la pièce nommée 2 (eqn. 3.22).



$$[E_2]_O = \begin{cases} t_{cf} \geq 2 * h * r_y + 2 * t_x \\ t_{cf} \geq -2 * h * r_y - 2 * t_x \\ t_{cf} \geq 2 * t_x \\ t_{cf} \geq -2 * t_x \end{cases} \quad (3.22)$$

Fig. 3.11 –  $[E_2]_O$

Soit la V-représentation (eqn. 3.23) :

$$[E_2]_O = t_2 * \left[ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\quad}_{V_{2,1}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/h \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\quad}_{V_{2,2}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\quad}_{V_{2,3}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/h \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\quad}_{V_{2,4}} \end{array} \right]_O \quad (3.23)$$

### ▷ Calcul des coefficients d'influence

D'après l'algorithme de calcul des coefficients d'influence défini précédemment (cf. § II.2.a), on obtient les résultats représentés dans le tableau ci-dessous (tab. 3.1) :

	$[E_1]_O$					$[E_2]_O$				
	$V_{1,1}$	$V_{1,2}$	$V_{1,3}$	$V_{1,4}$	$\Rightarrow c_{i,1}$	$V_{2,1}$	$V_{2,2}$	$V_{2,3}$	$V_{2,4}$	$\Rightarrow c_{i,2}$
$G_1 : t_{cf,1,k} = 2.h.r_y + 2.t_x$	1	3	-1	-3	$\Rightarrow 3$	1	1	-1	-1	$\Rightarrow 1$
$G_2 : t_{cf,2,k} = -2.h.r_y - 2.t_x$	-1	-3	1	3	$\Rightarrow 3$	-1	-1	1	1	$\Rightarrow 1$
$G_3 : t_{cf,3,k} = -2.h.r_y + 2.t_x$	1	-1	-1	1	$\Rightarrow 1$	1	-3	-1	3	$\Rightarrow 3$
$G_4 : t_{cf,4,k} = 2.h.r_y - 2.t_x$	-1	1	1	-1	$\Rightarrow 1$	-1	3	1	-3	$\Rightarrow 3$

Table 3.1 – Coefficients d'influence des domaines écarts  $[E_1]$  et  $[E_2]$  sur la condition fonctionnelle  $[C_f]$

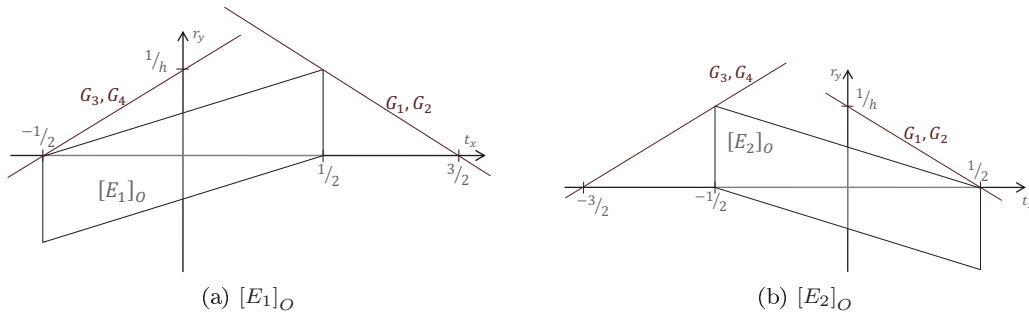


Fig. 3.12 – Illustration du calcul des coefficients d'influence

La condition fonctionnelle est donc respectée, si et seulement si (eqn. 3.24) :

$$\begin{cases} H_1, H_2 : & t_{cf} \geq 3 * t_1 + 1 * t_2 \\ H_3, H_4 : & t_{cf} \geq 1 * t_1 + 3 * t_2 \end{cases} \quad (3.24)$$

La condition de respect au pire des cas de l'exigence fonctionnelle est donc limitée par deux segments. En effet, le couple de valeurs  $(t_1, t_2)$  doit respecter les deux inéquations linéaires précédentes (eqn. 3.24). Lorsque  $t_1 > t_2$  les conditions fonctionnelles élémentaires  $H_1$  et  $H_2$  sont limitantes. Et inversement, lorsque  $t_1 < t_2$  ce sont les conditions fonctionnelles élémentaires  $H_3$  et  $H_4$  qui sont limitantes (fig. 3.13).

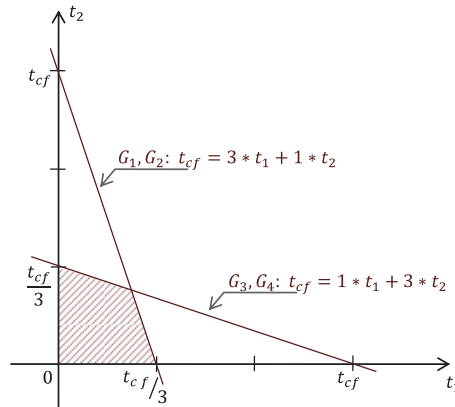


Fig. 3.13 – Domaine de respect de l'exigence fonctionnelle de tolérance  $t_{cf}$

### II.2.c Algorithme

Cette méthode de calcul suppose que les domaines "condition fonctionnelle" et "écarts" affecté à chaque surface soient définis par des polytopes de forme immuables (dans le cas de spécification multiples sur une même surface, le rapport des valeurs de tolérance est figé). Dans le cas où mes frontière des domaine ne sont pas linéaires, nous procédons à une facétisation. Cette opération introduit une approximation qui est minimisée en augmentant le nombre de facettes. Un compromis entre précision et temps de calcul doit être fait afin de déterminer le pas de discrétisation optimal des domaines.

```

    Pour i=1 à nombre de conditions élémentaires ( $H_i : t_{cf_i} \geq \sum_{j=1}^6 a_{i,j} \cdot x_j$ )
        Pour ps=1 à nombre de surfaces composant la boucle d'assemblage.
            Pour k=1 à nombre de sommets  $v_{ps}$ 
                 $c_{i,ps,k} = \sum_{j=1}^6 a_{i,j} * v_{ps,j,k}$ 
            Fin Pour
             $c_{i,ps} = \text{Max}_k(c_{i,ps,k})$ 
        Fin Pour
         $t_{cf_i} = \sum_{ps} c_{i,ps} * t_{ps}$ 
    Fin Pour
    
```

Cet algorithme original permet d'obtenir la relation linéaire de respect, au pire de cas, des exigences géométriques fonctionnelles en prenant en compte uniquement la configuration la plus défavorable (fig. 3.14(b)) et non plus l'ensemble des sommets de chaque domaine (fig. 3.14(a)).

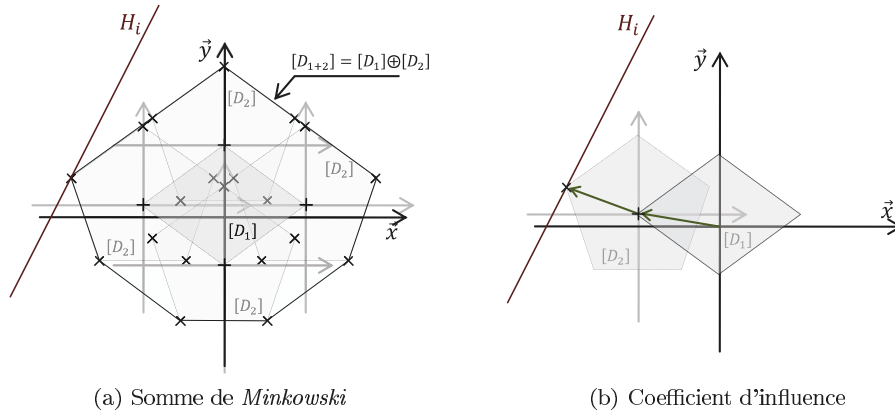


Fig. 3.14 – Illustration du calcul de l'influence des défauts, sur le respect d'une exigence fonctionnelle  $H_i$

Ainsi, l'évolution de la complexité de calcul est réduite à une proportionnalité du nombre de sommets de chaque domaine écarts, contre une évolution exponentielle avec la méthode des sommes de *Minkowski* classique [Teissandier 99b], [Wu 03, Mujezinovic 04], [Petit 04].

Le respect au pire des cas de la condition fonctionnelle est désormais traduit par un système d'inéquations linéaires. Cette expression mathématique permet :

- **L'analyse du tolérancement** de tout type d'assemblage tridimensionnel en série sans jeu.
- **D'optimiser la géométrie** en conception préliminaire par minimisation des coefficients d'influence.
- **D'établir la spécification et la répartition de tolérance optimale** en conception détaillée. En effet, dans le type d'assemblage étudié ici (empilage simple) chaque pièce comporte



deux surfaces de contact qui peuvent être spécifiées de deux manières : en zone commune ou en prenant l'une en référence pour tolérancer l'autre. En choisissant de définir la surface ayant le coefficient d'influence le plus élevé en référence, ses écarts ne sont plus influents et nous obtenons des intervalles de tolérance plus larges. Cette optimisation de la répartition de tolérances n'est possible qu'en réalisant la spécification qualitative et la synthèse de tolérances de manière simultanée.

Ces résultats sont cohérents avec la pratique métier du tolérancement qui consiste à tolérancer les surfaces les plus "proches" de la surface fonctionnelle.

Dans notre exemple (fig. 3.1), en prenant pour chaque pièce une surface en référence, nous obtenons le système linéaire de respect de la condition fonctionnelle suivant (eqn. 3.25) :

$$t_{cf} \geq 1 * t_{11} + \left( \frac{2 * L}{a} \right) * t_{22} + 1 * t_{32} \quad (3.25)$$

Une optimisation peut également être effectuée dans le choix de la modélisation de l'exigence fonctionnelle. En effet, dans le cas d'une spécification entre les deux surfaces fonctionnelles, avec une surface en référence, le choix de la surface de référence a un impact sur la valeur des coefficients d'influence et donc sur l'étendue des tolérances allouées aux surfaces de contact intermédiaires. C'est ce que nous allons illustrer à travers l'exemple de l'assemblage axisymétrique en série sans jeu suivant.

### II.3 Application sur un assemblage axisymétrique

Soit l'assemblage axisymétrique illustré ci-dessous (fig. 3.15).

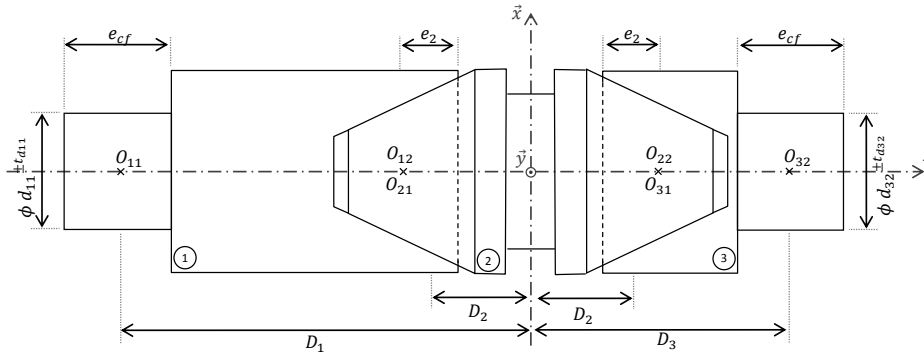


Fig. 3.15 – Exemple d'assemblage axisymétrique en série sans jeu

L'assemblage est axisymétrique, nous pouvons donc simplifier l'étude au pire des cas en un problème plan  $(\vec{x}, \vec{z})$  [Giordano 07].

#### II.3.a Modélisation de l'assemblage

Un exigence géométrique fonctionnelle de coaxialité s'applique entre les deux surfaces terminales réputées cylindriques 11 et 32. Cette condition fonctionnelle  $C_f$  se modélise sous la forme du tolérancement d'une surface par rapport à l'autre prise en référence.

Avec la modélisation de l'assemblage définie précédemment (fig. 3.2), la fermeture de chaîne appliquée à notre assemblage nous donne la relation torsorielle suivante (eqn. 3.33) :

$$C_f = -E_{11} + E_{12} - E_{21} + E_{22} - E_{31} + E_{32} \quad (3.26)$$

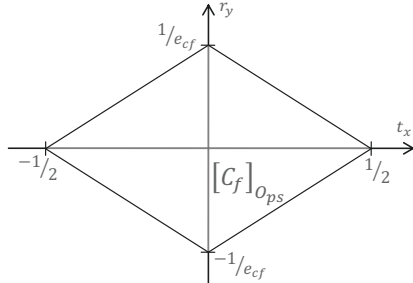
#### II.3.b Modélisation de la condition fonctionnelle

Une exigence fonctionnelle de coaxialité relie les deux surfaces fonctionnelles 11 et 32. Dans les hypothèses de problème axisymétrique, les degrés de liberté de la zone de tolérance affectée à cette condition fonctionnelle sont le couple  $(\vec{r}_y, \vec{t}_x)$ .

Afin de mettre en évidence l'influence du choix de la spécification de la condition fonctionnelle, celle-ci sera définie de deux manières :

- En spécifiant la surface 32 par rapport à la surface 11 prise en référence.
- Ou en spécifiant la surface 11 par rapport à la surface 32 prise en référence.

Dans les deux cas, le domaine condition fonctionnelle  $[C_f]$  est défini au point  $O_{ps}$  centre de la surface  $ps$  tolérancée par le système d'inéquations suivant (eqn. 3.27) :



$$[C_f]_{O_{ps}} = \begin{cases} H_1 : t_{cf} \geq e_{cf} * r_y + 2 * t_x \\ H_2 : t_{cf} \geq -e_{cf} * r_y - 2 * t_x \\ H_3 : t_{cf} \geq -e_{cf} * r_y + 2 * t_x \\ H_4 : t_{cf} \geq e_{cf} * r_y - 2 * t_x \end{cases} \quad (3.27)$$

Fig. 3.16 –  $[C_f]_{O_{ps}}$

### II.3.c Modélisation des domaines écarts

La spécification qualitative systématique des surfaces supposées coniques reste problématique.

Cependant, l'exigence fonctionnelle étant cohérente vis-à-vis de la topologie de l'assemblage, nous savons que les zones de tolérances affectées aux surfaces de liaison ont les mêmes degrés de libertés que celle associée à la condition fonctionnelle. Nous associerons donc à toute surface  $ps$ , une zone de tolérance cylindrique de diamètre  $t_{ps}$  coaxiale par rapport à l'axe de référence  $A$  dans laquelle doit être inclus l'axe réel de la surface tolérancée.

En limitant les petits déplacements de l'axe tolérancé à l'intérieur de sa zone de tolérance, nous obtenons un système d'inéquations définissant le domaine écarts correspondant.

Soient  $O_{cf}$  et  $O_{ps}$  les points centraux respectifs des surfaces fonctionnelles et de contact  $ps$  tolérancées, on note :

- $D = \left\| \vec{O_{ps}O_{cf}} \right\|$
- et  $E$  l'étendue de la surface tolérancée  $ps$  projetée sur l'axe  $\vec{z}$ .

En fonction du point d'expression du domaine, les coordonnées de ses sommets diffèrent :

- Au point  $O_{32}$  centre de la surface fonctionnelle 32, les domaines écarts  $[E_{ps}]_{O_{32}}$  sont de la forme (eqn. 3.28) :

$$[E_{ps}]_{O_{32}} = t_{ps} * \left[ \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{1,1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 1/E \\ 0 \\ D/E \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{1,2}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{1,3}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -1/E \\ 0 \\ -D/E \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{1,4}} \right]_{O_{32}} \quad (3.28)$$

- Au point  $O_{11}$  centre de la surface fonctionnelle 11, les domaines écarts  $[E_{ps}]_{O_{11}}$  sont de la forme (eqn. 3.29) :

$$[E_{ps}]_{O_{11}} = t_{ps} * \left[ \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{1,1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 1/E \\ 0 \\ -D/E \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{1,2}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{1,3}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -1/E \\ 0 \\ D/E \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{1,4}} \right]_{O_{11}} \quad (3.29)$$

### II.3.d Calcul des coefficients d'influence

Dans ce cas particulier d'assemblage, la condition fonctionnelle élémentaire limitante est toujours la même. On obtient donc une relation linéaire unique traduisant le respect de l'exigence géométrique fonctionnelle de coaxialité.

Avec la notation précédente et d'après la forme des domaines écarts  $[E_{ps}]$  et condition fonctionnelle  $[C_f]$ , les coefficients d'influence  $c_{i_{max},ps}$  sur la condition fonctionnelle élémentaire la plus restrictive  $H_{i_{max}}$  sont donnés par la relation suivante (eqn. 3.30) :

$$c_{i_{max},ps} = \frac{e_{cf} + 2 * D}{E} \quad (3.30)$$

En fonction de la méthode de spécification de la condition fonctionnelle, les coefficients d'influence ne sont donc pas les mêmes. Pour chaque pièce, en prenant la surface de liaison ayant le plus gros coefficient d'influence en référence, on obtient :

- Dans le cas où la surface 11 est prise en référence pour tolérer la surface fonctionnelle 32, l'inéquation linéaire de respect de l'exigence fonctionnelle est de la forme (eqn. 3.31) :

$$t_{cf} = \frac{e_{cf} + 2 * (D_3 + D_2)}{e_2} * t_{12} + \frac{e_{cf} + 2 * (D_3 - D_2)}{e_2} * t_{22} + 1 * t_{32} \quad (3.31)$$

- Dans le cas où la surface 32 est prise en référence pour tolérer la surface fonctionnelle 11, l'inéquation linéaire de respect de l'exigence fonctionnelle est de la forme (eqn. 3.32) :

$$t_{cf} = \frac{e_{cf} + 2 * (D_1 + D_2)}{e_2} * t_{31} + \frac{e_{cf} + 2 * (D_1 - D_2)}{e_2} * t_{21} + 1 * t_{11} \quad (3.32)$$

Dans l'hypothèse où  $D_1 > D_3$ , les coefficients d'influence sont plus faibles lorsque l'on prend la surface 11 en référence. Ce type de spécification permettra donc d'obtenir de plus larges intervalles de tolérance sur les surfaces de liaisons.

On retrouve la pratique métier du tolérancement, qui consiste à privilégier le tolérancement des surfaces "proches" de la condition fonctionnelle.

## III Assemblage en série avec jeu

Les connexions entre les pièces du mécanisme peuvent introduire des jeux de liaison dans l'assemblage. Ceux-ci sont modélisés par des domaines jeux  $[J_j]$  associés aux liaisons  $j$ . Ils sont définis de la même manière que les domaines écarts  $[E_{ps}]$  construits sur chaque surface  $ps$ .

Avec la modélisation de l'assemblage définie précédemment (fig. 3.2), et en considérant  $C_f$  et  $E_{ps}$  les torseurs écarts respectifs de la surface fonctionnelle et des surfaces  $ps$  et  $J_j$  le torseur jeux de la liaison  $j$ , la fermeture de chaîne appliquée à notre assemblage nous donne la relation torsorielle suivante (eqn. 3.33) :

$$C_f = -E_{11} + E_{12} + J_{12} - E_{21} + E_{22} + J_{23} - \dots + J_{n-1,n} - E_{n1} + E_{n2} \quad (3.33)$$

En fonction de leur rôle dans le fonctionnement du système, les jeux sont pris en compte de différentes manières. Jean-Yves Dantan [Dantan 05, Dantan 09] les distingue à l'aide d'opérateurs mathématiques ( $\forall, \exists$ ) (cf. chapitre 2)

Nous avons recensé trois cas d'étude des empilages simples avec jeux (fig. 2.27) :

- **Jeux défavorables** : Soit une condition fonctionnelle  $[C_f]$ , on souhaite qu'elle soit respectée quels que soient les écarts  $\vec{E}$  appartenant au domaine écarts  $[E]$  pour toutes les configurations de jeux  $\vec{J}$  appartenant au domaine jeux  $[J]$  (eqn. 3.34) :

$$\begin{aligned} \forall \vec{E} \in [E] \text{ et } \forall \vec{J} \in [J] \\ (\vec{E} + \vec{J}) \in [C_f] \end{aligned} \quad (3.34)$$

- **Configuration de jeu donnée** : on souhaite que la condition fonctionnelle  $[C_f]$  soit respectée quels que soient les écarts  $\vec{E}$  appartenant au domaine écarts  $[E]$  dans une configuration de jeux donnée  $\vec{J}_d$  appartenant au domaine jeux  $[J]$  (eqn. 3.35) :

$$\begin{aligned} \text{Pour : } \quad & \vec{J}_d \in [J] \text{ donné} \\ & \forall \vec{E} \in [E], \quad (\vec{E} + \vec{J}_d) \in [C_f] \end{aligned} \quad (3.35)$$

- **Jeux favorables** : on souhaite que la condition fonctionnelle  $[C_f]$  soit respectée quels que soient les écarts  $\vec{E}$  appartenant au domaine écarts  $[E]$  pour au moins une configuration de jeux  $\vec{J}$  appartenant au domaine jeux  $[J]$  (eqn. 3.36) :

$$\begin{aligned} \forall \vec{E} \in [E] \\ \exists \vec{J} \in [J] \text{ tel que : } (\vec{E} + \vec{J}) \in [C_f] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Fig. 3.17 –  $(\vec{E} + \vec{J}) \in [C_f]$

Pour chacun de ces trois cas d'étude d'empilage simple avec jeu, nous proposons une méthode originale de résolution et d'optimisation du tolérancement.

### III.1 Jeux défavorables

Dans cette topologie d'assemblage, les jeux  $[J_j]$  au sein de la liaison  $j$  ont un comportement identique aux écarts  $[E_{ps}]$  de la surface  $s$  de la pièce  $p$ . Ils sont donc pris en compte au même titre.

Leur coefficient d'influence  $c_{i,j}$  sur la condition fonctionnelle élémentaire  $H_i$  est calculé de la même manière que les coefficients d'influence  $c_{i,ps}$  de la surface  $ps$  (cf. § II.2).

Pour chaque condition fonctionnelle élémentaire  $H_i$ , nous obtenons une relation linéaire reliant la valeur de la tolérance fonctionnelle  $t_{cf}$  à  $t_{ps}$  celle des surface  $s$  des pièces  $p$  du mécanisme et aux jeux  $j_j$  des liaisons  $j$  (eqn. 3.37) :

$$\forall H_i, \quad t_{cf} \geq \sum_{ps} c_{i,ps} * t_{ps} + \sum_j c_{i,j} * j_j \quad (3.37)$$

Dans le cas général, la valeur  $j_j$  du jeu dépend des valeurs géométriques intrinsèques aux surfaces réalisant la liaison  $j$ . Le jeu  $j_j$  varie donc autour d'une valeur moyenne  $j_{j,moyen}$ , calculée avec une géométrie nominale cible, d'une tolérance  $t_{j_j}$  dépendant des tolérances sur les dimensions géométriques intrinsèques :

$$j_j = j_{j,moyen} \pm t_{j_j}/2 \quad (3.38)$$

Dans ce cas d'étude, les jeux sont intégrés dans l'inéquation de respect de la condition fonctionnelle au même titre que les défauts géométriques. Leur valeur moyenne  $j_{j,moyen}$  ainsi que sa tolérance  $t_{j_j}$  sont additionnées aux autres tolérances au pire des cas. Nous retrouvons une spécification au minimum de matière  $j_j = j_{j,moyen} + t_{j_j}/2$ .

Une étude du tolérancement avec jeux défavorables correspond à une problématique de précision (les jeux ne doivent pas être trop élevés pour assurer une position relative des surfaces fonctionnelles). Il est donc cohérent de retrouver des jeux  $j_j$  calculés avec une géométrie nominale et des dimensions au minimum de matière (valeurs de jeux maximales (pire des cas)).

Cette étude permet donc de fixer la limite supérieure de l'étendue des jeux ( $j_j \leq j_{j_{max}}$ ). Si nécessaire une limite inférieure sera calculée avec une géométrie au maximum de matière en faisant l'hypothèse de jeux favorables.

### III.2 Jeux donnés

La configuration de jeux donnés peut être considérée comme un domaine jeu défavorable ne comportant qu'un seul sommet. Ainsi, de la même manière que précédemment nous pouvons écrire la relation linéaire entre la valeur de la tolérance fonctionnelle  $t_{cf}$ , des tolérances géométriques  $t_{ps}$  et des jeux donnés  $j_{d_j}$  pour chaque condition fonctionnelle élémentaire  $H_i$  (eqn. 3.39) :

$$\forall H_i, \quad t_{cf} \geq \sum_{ps} c_{i,ps} * t_{ps} + \sum_j c_{i,j} * j_{d_j} \quad (3.39)$$

### III.3 Jeux favorables

Soit :

- $[E]$  la somme de *Minkowski* des domaines écarts de l'ensemble des surfaces  $ps$  de liaison composant la boucle d'assemblage.
- $[J]$  la somme de *Minkowski* des domaines jeux de l'ensemble des liaisons  $j$  composant la boucle d'assemblage.
- $[C_f]$  le domaine modélisant l'exigence géométrique fonctionnelle.

D'après l'équation (3.36), la condition fonctionnelle est respectée au pire des cas si est seulement si (eqn. 3.40a) :

$$\begin{aligned} \forall \vec{E} \in [E] \\ \exists \vec{J} \in [J] \text{ et } \exists \vec{C}_f \in [C_f] \\ \text{Tel que : } \vec{C}_f = \vec{E} + \vec{J} \end{aligned} \quad (3.40a)$$

$$\text{Soit : } \vec{E} = \vec{C}_f - \vec{J} \quad (3.40b)$$

De la relation (3.40b), on déduit la relation de domaine (eqn. 3.41) :

$$\Rightarrow [E] \subset [C_f] \oplus [-J] \quad (3.41)$$

La condition fonctionnelle est donc respectée au pire des cas si et seulement si le domaine écarts résultant  $[E]$  est inclus dans le domaine  $[C_f] \oplus [-J]$  (fig. 3.18).

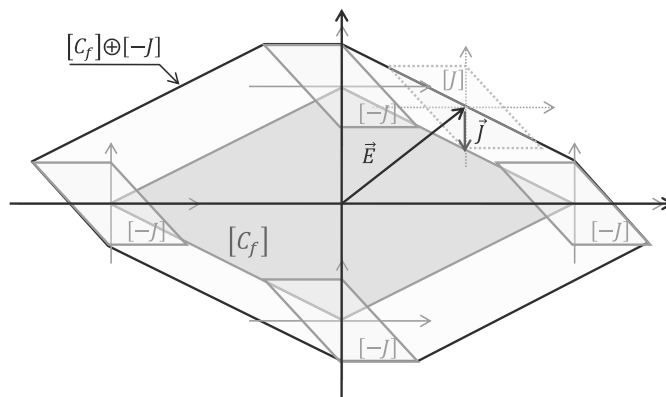


Fig. 3.18 –  $(\vec{E} + \vec{J}) \in [C_f]$

Dans ce cas d'étude, les jeux ont un comportement similaire à l'exigence fonctionnelle, ils doivent être assez élevés pour rattraper les écarts de position. Ils sont donc intégrés du même côté que la condition fonctionnelle dans le système d'inéquations. La valeur du jeu  $j_{moyen}$  est additionnée à la condition fonctionnelle, alors que ses variations géométriques  $\pm t_j/2$  sont ajoutées aux autres tolérances d'écarts. Nous retrouvons une spécification au maximum de matière  $j_j = j_{j,moyen} - t_{j_j}/2$ .

Une étude du tolérancement avec jeux favorables correspond à une problématique de type montabilité (à condition fonctionnelle nulle on retrouve la relation  $[E] \subset [J]$ ). Il est donc cohérent de retrouver des jeux  $j_j$  calculés avec une géométrie nominale au maximum de matière (valeurs de jeux minimales (pire des cas)).

Cette étude permet donc de fixer la limite inférieure de l'étendue des jeux ( $j_j \geq j_{j,min}$ ). En l'associant à l'étude avec hypothèse de jeux défavorables, on obtient un domaine de variation pour les jeux et donc un tolérancement de la géométrie des surfaces de liaison.

Afin de s'affranchir des problèmes de ressources de calculs, induits par l'évaluation de la somme de *Minkowski* pour obtenir le domaine  $[C_f] \oplus [-J]$ , nous proposons ci-après, une méthode de calcul originale permettant d'obtenir les relations linéaires de respect de l'exigence géométrique fonctionnelle dans l'hypothèse de jeux favorables.

#### ◇ Méthode de calcul

La condition fonctionnelle avec jeux favorables est respectée si et seulement si le domaine écarts résultant  $[E]$  appartient au domaine  $[C_f] \oplus [-J]$ . Pour éviter le calcul de la somme de *Minkowski*, les relations d'appartenance à chacun des domaines  $[C_f]$  et  $[-J]$  sont calculées séparément. La condition suffisante d'appartenance finale est obtenue par le théorème de superposition illustré ci-dessous (eqn. 3.42).

#### ▷ Théorème de superposition

Soient les domaines écarts  $[E_1]$ ,  $[E_2]$  et les domaines jeux  $[J_1]$ ,  $[J_2]$ .

$$Si [E_1] \subset [J_1]$$

$$Et [E_2] \subset [J_2]$$

Alors,

$$[E_1] \oplus [E_2] \subset [J_1] \oplus [J_2] \quad (3.42)$$

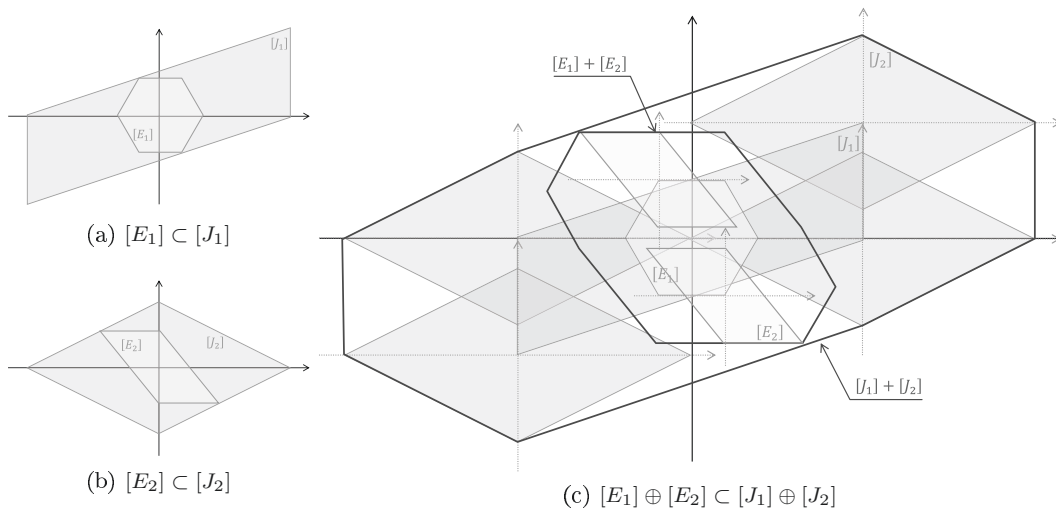


Fig. 3.19 – Illustration du principe de superposition



◦ **Domaine écarts résultant de base  $[E_{c_f}]$  :**

- ▷ Soit le domaine condition fonctionnelle  $[C_f]$  composé de  $i$  conditions fonctionnelles élémentaires  $H_{c_{fi}}$ .
- ▷ Soit  $t_{ps,c_f}$  le paramètre de transformation homothétique du domaine écarts  $[E_{ps,c_f}]$  de base de la surface  $ps$  associé au domaine condition fonctionnelle  $[C_f]$  (eqn. 3.48) :

$$[E_{ps,c_f}] = t_{ps,c_f} * [e_{ps,c_f}] \quad (3.48)$$

Le coefficient d'influence du domaine écart de base  $[E_{ps,c_f}]$  sur la condition fonctionnelle élémentaire  $H_{c_{fi}}$  sera appelé  $c_{i,ps,c_f}$

De la même manière, la condition d'inclusion du domaine écart de base  $[E_{ps,c_f}]$  dans le domaine  $[C_f]$  associé s'écrit (eqn. 3.49) :

$$\forall H_{c_{fi}}, \quad t_{c_f} \geq \sum_{ps} c_{i,ps,c_f} * t_{ps,c_f} \quad (3.49)$$

D'après les équations (eqn. 3.47) et (eqn. 3.49) et le théorème de superposition, on obtient la relation linéaire de respect au pire des cas de l'exigence géométrique fonctionnelle en fonction des tolérances  $t_{ps}$  de chaque surface  $ps$ , des jeux de liaison  $J_j$  et de la tolérance fonctionnelle  $t_{c_f}$  (eqn. 3.50a) :

$$\forall ps, \quad t_{ps} \leq t_{ps,c_f} + \sum_j^n t_{ps,j} \quad (3.50a)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \forall H_{j_i}, & J_j \geq \sum_{ps} c_{i,ps,j} * t_{ps,j} \\ \forall H_{c_{fi}}, & t_{c_f} \geq \sum_{ps} c_{i,ps,c_f} * t_{ps,c_f} \end{cases} \quad (3.50b)$$

Les jeux sont favorables, en ce sens qu'ils permettent d'élargir les tolérances d'écarts géométrique  $t_{ps}$  affectées aux surfaces de liaison  $ps$ . En effet, la tolérance  $t_{ps}$  finale est égale à la tolérance  $t_{ps,c_f}$  calculée sans jeux, à laquelle on ajoute la tolérance  $t_{ps,j}$  autorisée par les jeux.

### III.4 Application sur un exemple d'assemblage en série avec jeux

Soit l'assemblage en série avec jeu suivant (fig. 3.20). La condition fonctionnelle est une exigence de localisation entre l'axe de la surface supposée cylindrique 32 et la surface médiane 11 de deux surfaces supposées planes.

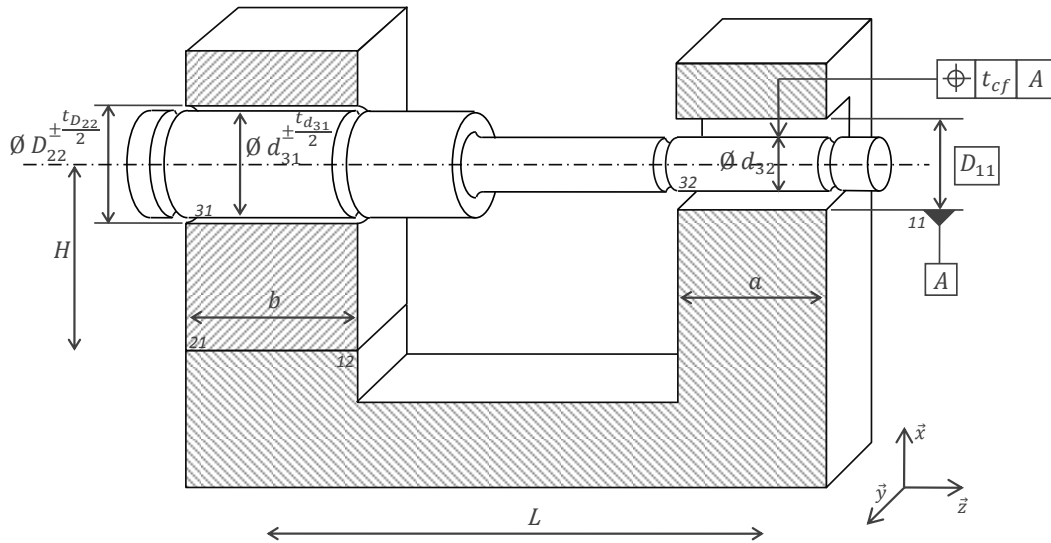


Fig. 3.20 – Exemple d'assemblage en série avec jeux



### III.4.a Modélisation

De par la topologie du mécanisme, au pire des cas, les configurations les plus défavorables peuvent être décrites par des petits déplacements dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ . Par soucis de simplification et de clarté de présentation de la méthode, nous limiterons notre étude au pire des cas au calcul du tolérancement dans ce plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ .

Dans le cas statistique, cette hypothèse est trop simplificatrice ne devons donc travailler dans l'espace tridimensionnelle  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

#### ◇ Assemblage

La condition fonctionnelle est spécifiée par le tolérancement en localisation de l'axe de la surface réputée cylindrique 32 par rapport au plan 11 pris en référence médian de deux surfaces réputées planes.

Avec la convention de modélisation de l'assemblage par graphe, définie au chapitre (2) (cf. § III.1), ce mécanisme est représenté par le graphe suivant (cf. § 3.21) :

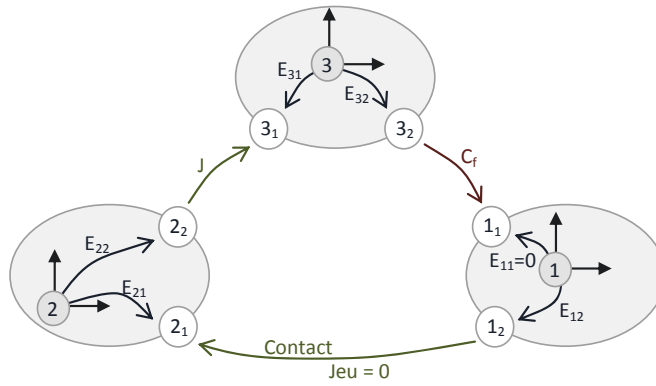


Fig. 3.21 – Graphe d'assemblage de l'assemblage en série avec jeux

D'après l'équation ( 3.33), la relation torsorielle de fermeture de chaîne de ce mécanisme s'écrit sous la forme (eqn. 3.51) :

$$C_f = -0 + E_{12} + 0 - E_{21} + E_{22} + J - E_{31} + E_{32} \quad (3.51)$$

#### ◇ Condition fonctionnelle

L'exigence fonctionnelle est modélisée par une zone de tolérance dans laquelle doit être inclus l'axe réel de la surface réputée cylindrique 32. Cette zone de tolérance est limitée par deux plans parallèles distant de la tolérance fonctionnelle  $t_{cf}$  centré sur le plan de référence 11 médian de deux surfaces réputées planes. Dans nos hypothèses de travail de problème plan, les degrés de liberté de cette zone de tolérance sont le couple  $(\vec{r}_y, \vec{t}_x)$ .

En limitant les petits déplacements de l'axe de la surface 32 à l'intérieur de sa zone de tolérance, on obtient le domaine condition fonctionnelle  $[C_f]$  défini par le système d'inéquations suivant (eqn. 3.52) :

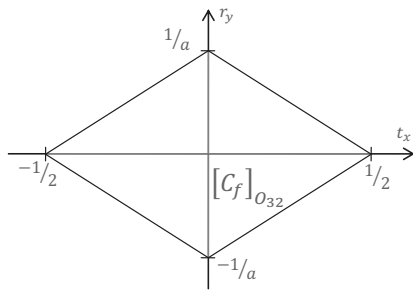


Fig. 3.22 –  $[C_f]_{O_{32}}$

$$[C_f]_{O_{32}} = \begin{cases} H_{cf1} : t_{cf} \geq a * r_y + 2 * t_x \\ H_{cf2} : t_{cf} \geq -a * r_y - 2 * t_x \\ H_{cf3} : t_{cf} \geq -a * r_y + 2 * t_x \\ H_{cf4} : t_{cf} \geq a * r_y - 2 * t_x \end{cases} \quad (3.52)$$

### ◇ Domaines

#### ▷ Domaines écarts

Les zones de tolérance affectées à chaque surface de liaison  $ps$  ont les mêmes degrés de liberté que celle de la condition fonctionnelle. Leur forme dépend de la nature de la surface tolérancée.

Dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ , la zone de tolérance est limitée par 2 segments parallèles distants de la tolérance  $t_{ps}$  et centrés sur la position nominale de la surface tolérancée  $ps$ .

En reprenant la convention définie au paragraphe (II.3.c), on note :

- $D = \left\| O_{ps} \vec{O}_{32} \right\|$  (avec  $O_{ps}$  centre de la surface tolérancée  $ps$ )
- et  $E$  l'étendue de la surface tolérancée  $ps$  projetée sur l'axe  $\vec{z}$ .

On retrouve la V-représentation (3.53) des domaines écarts  $[E_{ps}]_{O_{32}}$  au point  $O_{32}$  centre de la surface fonctionnelle 32.

$$[E_{ps}]_{O_{32}} = t_{ps} * \left[ \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{ps,1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 1/E \\ 0 \\ D/E \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{ps,2}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{ps,3}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -1/E \\ 0 \\ -D/E \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{ps,4}} \right]_{O_{32}} \quad (3.53)$$

#### ▷ Domaine jeux

Le domaine jeux modélise les petits déplacements relatifs des surfaces de contact au sein de leur liaison. Ces petits déplacements sont limités par la condition d'impénétrabilité de la matière.

Dans notre cas, seule la liaison entre les surfaces 22 et 31 présente des jeux de liaisons. En prenant  $J = \frac{D_{22}-d_{31}}{2}$  on obtient, au point  $O_{32}$  centre de la surface fonctionnelle tolérancée 32 la V-représentation du domaine jeux  $[J]$  (eqn. 3.54) :

$$[J]_{O_{32}} = J * \left[ \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{j,1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 1/b \\ 0 \\ L/b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{j,2}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{j,3}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -1/b \\ 0 \\ -L/b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{V_{j,4}} \right]_{O_{32}} \quad (3.54)$$

Suivant le rôle des jeux au sein du mécanisme, il peut être pris en compte de la même manière que la condition fonctionnelle. Sa H-représentation est alors nécessaire (eqn. 3.55) :

$$[J]_{O_{32}} = \begin{cases} H_{j_1} : J \geq -2 * (L + \frac{b}{2}) * r_y + 2 * t_x \\ H_{j_2} : J \geq 2 * (L + \frac{b}{2}) * r_y - 2 * t_x \\ H_{j_3} : J \geq -2 * (L - \frac{b}{2}) * r_y + 2 * t_x \\ H_{j_4} : J \geq 2 * (L - \frac{b}{2}) * r_y - 2 * t_x \end{cases}$$

### III.4.b Calcul des coefficients d'influence

Deux cas d'étude sont à considérer :

- *Précision du mécanisme* : La condition fonctionnelle doit être respectée pour toutes les configurations de jeux  $\vec{J}$  (jeux défavorables).
- *Montabilité* : Il doit exister au moins une configuration de jeux  $\vec{J}$  et  $\vec{C}_f$  permettant l'assemblage du mécanisme (jeux favorables)

### ◇ Précision du mécanisme

Dans ce cas, les jeux sont pris en compte au même titre que les défauts. Les domaines jeux sont représentés par leur V-représentation et leur coefficient d'influence calculé comme ceux des domaines écarts.

Le jeu  $J = J_{moyen} + t_j$  est défavorable. Sa valeur moyenne  $J_{moyen} = D_{22} - d_{31}$  ainsi que son domaine de variation  $t_j = \pm \frac{t_{D_{22}} + t_{d_{31}}}{2}$  sont additionnés aux tolérances d'écarts géométriques.

Nous retrouvons une spécification au minimum de matière  $J = (D_{22} - d_{31}) + \frac{t_{D_{22}} + t_{d_{31}}}{2}$ . Et la précision est garantie par limitation du jeu maximal.

Le calcul des coefficients d'influence nous donne le système d'inéquations suivant (eqn. 3.55) :

$$\begin{cases} H_1, H_2 : & t_{cf} \geq \alpha * t_{12} + \alpha * t_{21} + \alpha * t_{22} + \alpha * J + \alpha * t_{31} + 1 * t_{32} \\ H_3, H_4 : & t_{cf} \geq \beta * t_{12} + \beta * t_{21} + \beta * t_{22} + \beta * J + \beta * t_{31} + 1 * t_{32} \\ \alpha = & \frac{2*L-a}{b} \\ \beta = & \frac{a+2*L}{b} \end{cases} \quad (3.55)$$

Pour notre exemple d'assemblage  $\beta > \alpha$ , la condition fonctionnelle élémentaire  $H_i$  est donc toujours la même, quelle que soit la répartition de tolérances. Le respect de l'exigence fonctionnelle de précision s'écrit donc (eqn. 3.56) :

$$\begin{cases} t_{cf} \geq \beta * t_{12} + \beta * t_{21} + \beta * t_{22} + \beta * J + \beta * t_{31} + 1 * t_{32} \\ \text{Avec : } \begin{cases} J = (D_{22} - d_{31}) + \frac{t_{D_{22}} + t_{d_{31}}}{2} \\ \beta = \frac{a+2*L}{b} \end{cases} \end{cases} \quad (3.56)$$

### ◇ Montabilité

Dans ce cas, les jeux doivent exister (paramètre de taille supérieur à 0) et ont un comportement similaire à la condition fonctionnelle; ils permettent l'assemblage.

Le jeu  $J = J_{moyen} + t_j$  est favorable. Sa valeur moyenne  $J_{moyen} = D_{22} - d_{31}$  et ajoutée à la condition fonctionnelle tandis que son domaine de variation  $t_j = \pm \frac{t_{D_{22}} + t_{d_{31}}}{2}$  est additionné aux tolérances d'écarts géométriques.

Nous retrouvons une spécification au maximum de matière  $J = (D_{22} - d_{31}) - \frac{t_{D_{22}} + t_{d_{31}}}{2}$ . Et le jeu minimal permettant l'assemblage est garanti.

La condition de respect de l'exigence fonctionnelle est calculée à l'aide du théorème de superposition.

#### ▷ Condition d'inclusion dans le domaine condition fonctionnelle $[C_f]$

D'après l'équation (eqn. 3.56), en considérant le domaine jeux  $[J]$  nul, la condition d'inclusion du domaine écarts résultant de l'assemblage dans le domaine condition fonctionnelle  $[C_f]$  s'écrit (eqn. 3.57) :

$$\begin{aligned} t_{cf} &\geq \beta * t_{12,cf} + \beta * t_{21,cf} + \beta * t_{22,cf} + \beta * t_{31,cf} + 1 * t_{32,cf} \\ \text{Avec : } \beta &= \frac{a+2*L}{b} \end{aligned} \quad (3.57)$$

#### ▷ Condition d'inclusion dans le domaine jeux $[J]$

En fixant le domaine  $[C_f]$  nul, le domaine  $[-J]$  est désormais considéré comme le domaine condition à respecter, quels que soit les écarts géométriques. Les conditions fonctionnelles élémentaires sont donc définies par sa H-représentation. Le domaine jeux  $[J]$  étant symétrique par rapport à l'origine,  $[-J] = [J]$ . Sa H-représentation au point  $O_{32}$ , centre de la surface fonctionnelle tolérancée, est donc définie par le système d'inéquations ( 3.55).

Le calcul des coefficients d'influence des domaines écarts  $[E_{ps}]_{O_{32}}$  sur le domaine jeux  $[J]_{O_{32}}$  est illustré ci-dessous (tab. III.4.b) :

	$[E_{32}]_{O_{32}}$				$[E_s]_{O_{32}}, s = \{12; 21; 22; 31\}$			
	$V_{1,1}$	$V_{1,2}$	$V_{1,3}$	$V_{1,4}$	$V_{s,1}$	$V_{s,2}$	$V_{s,3}$	$V_{s,4}$
$G_{j1} : J = -2 \cdot (L + \frac{b}{2}) \cdot r_y + 2 \cdot t_x$	1	$\frac{-2L-b}{a}$	-1	$\frac{2L+b}{a}$	1	1	-1	-1
$G_{j2} : J = 2 \cdot (L + \frac{b}{2}) \cdot r_y - 2 \cdot t_x$	-1	$\frac{2L+b}{a}$	1	$\frac{-2L-b}{a}$	-1	-1	1	1
$G_{j3} : J = -2 \cdot (L - \frac{b}{2}) \cdot r_y + 2 \cdot t_x$	1	$\frac{-2L+b}{a}$	-1	$\frac{2L-b}{a}$	1	1	-1	-1
$G_{j4} : J = 2 \cdot (L - \frac{b}{2}) \cdot r_y - 2 \cdot t_x$	-1	$\frac{2L-b}{a}$	1	$\frac{-2L+b}{a}$	-1	-1	1	1

Table 3.2 – Coefficients d'influence des domaines écarts  $[E_{ps}]_{O_{32}}$  sur le domaine jeux  $[J]_{O_{32}}$

Quelle que soit la répartition des tolérances  $t_{ps,j}$ , les conditions élémentaires  $H_{j1}$  et  $H_{j2}$  sont limitantes. La condition d'inclusion dans le domaine jeux  $[J]$  est donc définie par l'inéquation suivante :

$$\begin{cases} H_1, H_2 : J \geq \gamma * t_{12,j} + \gamma * t_{21,j} + \gamma * t_{22,j} + \gamma * t_{31,j} + 1 * t_{32,j} \\ \gamma = \frac{2*L+b}{a} \end{cases} \quad (3.58)$$

#### ▷ Condition d'assemblage

D'après le théorème de superposition et les inéquations ( 3.57) et ( 3.58), la condition nécessaire et suffisante sur les tolérances  $t_{ps}$  des surfaces de liaison  $ps$  assurant le montage de l'assemblage, s'écrit :

$$\begin{cases} t_{ps} \leq t_{ps,cf} + t_{ps,j} \\ t_{cf} \geq \beta * t_{12,cf} + \beta * t_{21,cf} + \beta * t_{22,cf} + \beta * t_{31,cf} + 1 * t_{32,cf} \\ J \geq \gamma * t_{12,j} + \gamma * t_{21,j} + \gamma * t_{22,j} + \gamma * t_{31,j} + 1 * t_{32,j} \end{cases} \geq 0 \quad (3.59)$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{a+2*b}{b} \\ \gamma = \frac{2*L+b}{a} \end{cases}$$

## IV Répartition des tolérances

### IV.1 Optimisation sous contraintes

Généralement, le système d'inéquations définissant le respect des exigences fonctionnelles accepte une multitude de solutions. Le problème est donc formulé en vue d'obtenir la répartition de tolérances optimale d'un point de vue économique. Pour cela, une fonction coût de fabrication est exprimée en fonction des tolérances. Les tolérances doivent respecter les systèmes d'inéquations définis précédemment tout en minimisant cette fonction. Il s'agit donc d'un problème d'optimisation sous contraintes, pour lequel de nombreux travaux ont déjà été présentés : Optimisation d'une fonction coût/perte, méthode Dakin [Löf 05], ...

En première approximation, nous pouvons considérer que plus les tolérances sont faibles, plus le coût est élevé. De nombreuses fonctions ont déjà été proposées pour modéliser ce type d'évolution de coûts en fonction des tolérances [Chase 91]. En utilisant la fonction réciproque définie par Chase et Parkinson, la fonction à optimiser est de la forme (eqn. 3.60) :

$$C = A + \sum_{ps} \frac{b_{ps}}{t_{ps}} \quad (3.60)$$

Le coefficient  $A$  représente les coûts fixes (réglages machines, maintenance, matériaux, ...). Ce coefficient n'a aucune influence sur l'optimisation de la répartition des tolérances, il sera donc considéré nul par la suite. Les coefficients  $b_{ps}$  dépendent de la difficulté à respecter la tolérance  $t_{ps}$ .

## IV.2 Application à l'exemple d'assemblage en série avec jeux

Dans l'exemple précédent d'empilage simple avec jeux, chaque tolérance est supposée aussi coûteuse à respecter ( $\forall ps, b_{ps} = 1$ ).

Et la géométrie est définie comme suit :

$$\begin{aligned} L &= 100 \\ D_{22} &= 20,05 \\ d_{31} &= 19,95 \\ a = b &= 40 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Pour chaque cas d'étude (précision et montabilité) une répartition de tolérances optimale est obtenue.

### IV.2.a Précision du mécanisme

Pour chaque pièce, la surface dont le coefficient d'influence est le plus élevé, est prise en référence pour tolérer l'autre. Ainsi, aucune tolérance ne lui est affectée ( $t_{ps} = 0$ ). D'après l'inéquation ( 3.56) précédemment définie et les hypothèses sur la fonction coût, le problème d'optimisation s'écrit de la manière suivante (eqn. 3.62) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fonction coût :} \\ \text{Contraintes :} \end{array} \right. \quad \begin{cases} C = \frac{1}{t_{12}} + \frac{1}{t_{21}} + \frac{1}{t_{32}} + \frac{1}{t_{D_{22}}} + \frac{1}{t_{d_{31}}} \\ t_{cf} \geq \beta * t_{12} + \beta * t_{21} + \beta * J + 1 * t_{32} \\ \text{Avec : } \left\{ \begin{array}{l} J = (D_{22} - d_{31}) + \frac{t_{D_{22}} + t_{d_{31}}}{2} \\ \beta = \frac{a+2*L}{b} \end{array} \right. \end{cases} \quad (3.62)$$

La résolution de ce problème peut être obtenue analytiquement ou en utilisant un solveur numérique. Après optimisation, on obtient la répartition de tolérances suivante (eqn. 3.63) :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{12} \\ t_{21} \\ t_{32} \\ t_{D_{22}} \\ t_{d_{31}} \end{array} \right. = \begin{array}{l} 0,02 * t_{cf} \\ 0,02 * t_{cf} \\ 0,4 * t_{cf} \\ 0,03 * t_{cf} \\ 0,03 * t_{cf} \end{array} \quad (3.63)$$

### IV.2.b Montabilité

D'après l'inéquation ( 3.59) précédemment définie et les hypothèses sur la fonction coût, le système à optimiser s'écrit sous la forme (eqn. 3.64) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fonction coût :} \\ \text{Contraintes :} \end{array} \right. \quad \begin{cases} C = \frac{1}{t_{11}} + \frac{1}{t_{12}} + \frac{1}{t_{21}} + \frac{1}{t_{22}} + \frac{1}{t_{31}} + \frac{1}{t_{32}} + \frac{1}{t_{D_{22}}} + \frac{1}{t_{d_{31}}} \\ \left\{ \begin{array}{l} t_{ps} \leq t_{ps,cf} + t_{ps,j} \\ t_{cf} \geq 1 * t_{11,cf} + \beta * t_{12,cf} + \beta * t_{21,cf} + \beta * t_{22,cf} + \beta * t_{31,cf} + 1 * t_{32,cf} \\ J \geq 1 * t_{11,j} + \gamma * t_{12,j} + \gamma * t_{21,j} + \gamma * t_{22,j} + \gamma * t_{31,j} + 1 * t_{32,j} \end{array} \right. \geq 0 \\ J = (D_{22} - d_{31}) - \frac{t_{D_{22}} + t_{d_{31}}}{2} \\ \beta = \frac{a+2*L}{b} \\ \gamma = \frac{2*L+b}{a} \end{cases} \quad (3.64)$$

Une première optimisation nous donne les résultats suivants (eqn. 3.65) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_{11} & = & 0,06 * t_{cf} \\ t_{12} & = & 0,07 * t_{cf} \\ t_{21} & = & 0,07 * t_{cf} \\ t_{22} & = & 0,07 * t_{cf} \\ t_{31} & = & 0,07 * t_{cf} \\ t_{32} & = & 0,18 * t_{cf} \\ t_{D_{22}} & = & 0,10 * t_{cf} \\ t_{d_{31}} & = & 0,10 * t_{cf} \end{array} \right. \quad (3.65)$$

Pour chaque pièce, la surface dont la tolérance est la plus restrictive, donc plus coûteuse à respecter ( $t_{11}, t_{21}$  et  $t_{32}$ ), peut être prise en référence pour tolérer la seconde. Ainsi, la tolérance qui lui était associée est supprimée et nous obtenons de nouveaux intervalles de tolérance plus larges (eqn. 3.66) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_{12} & = & 0,11 * t_{cf} \\ t_{22} & = & 0,11 * t_{cf} \\ t_{31} & = & 0,11 * t_{cf} \\ t_{D_{22}} & = & 0,10 * t_{cf} \\ t_{d_{31}} & = & 0,10 * t_{cf} \end{array} \right. \quad (3.66)$$

### IV.3 Approche probabiliste

#### ◇ Méthodes générales

Jusqu'ici, nous nous sommes uniquement intéressés à l'expression et à la résolution du respect de la condition fonctionnelle au pire des cas. Mais cette exigence devient rapidement très contraignante avec le nombre de surfaces intermédiaires. Il est alors intéressant d'étudier l'évolution du taux de rebuts en fonction des paramètres géométriques et de l'élargissement des tolérances par une approche probabiliste.

De nombreux travaux ont déjà été présentés dans le domaine du tolérancement statistique. Evans [Evans 75] et Nigam [Nigam 95] font état des approches unidirectionnelles dans ce domaine. Des méthodes ont également été présentées pour apporter des réponses aux problématiques tridimensionnelles. En particulier Glancy [Glancy 99] propose d'exprimer la condition fonctionnelle à partir des paramètres tridimensionnels et de se ramener à une étude unidimensionnelle par linéarisation. Shan [A. Shan 99] traite une liaison composée d'un plan et de deux pions en ne considérant que les écarts en translation sans prendre en compte les défauts d'orientation. Il réduit ainsi son modèle à deux dimensions.

#### ▷ Tolérancement statistique paramétrique

Le modèle probabiliste le plus courant en unidimensionnel ou en tolérancement paramétrique (eqn. 1.8) (cf. chapitre 1 § II.3.e) utilise une relation quadratique entre les tolérances influant sur la condition fonctionnelle. En effet, les équations de tolérances étant linéaires (du type  $t_{cf} = \sum_{i=1}^p a_i * t_i$ ), en faisant l'hypothèse que les variables aléatoires  $t_i$  sont indépendantes, on peut écrire la relation, portant sur les variances  $v$ , suivante (eqn. 3.67a) :

$$v_{t_{cf}} = \sum_{i=1}^p a_i^2 * v_{t_i} \quad (3.67a)$$

$$v_{t_{cf}} = \sigma_{t_{cf}}^2 = \sum_{i=1}^p a_i^2 * \sigma_{t_i}^2 \quad (3.67b)$$

En définissant le coefficient de capabilité  $C_p = \frac{IT_i}{6\sigma_{t_i}} = \frac{IT_{cf}}{6\sigma_{t_{cf}}}$  égaux pour toutes les tolérances, on obtient la relation entre les intervalles de tolérances  $IT_i$  et l'intervalle de tolérance de la condition fonctionnelle  $IT_{cf}$  suivante (eqn. 3.68) :

$$IT_{cf}^2 = \sum_{i=1}^p a_i^2 * IT_i^2 \quad (3.68)$$

Dans le cas d'une distribution normale centrée, on retrouve la capabilité  $C_p$  tel qu'elle est définie dans la norme et sa valeur nous assure un taux de rebuts correspondant [Germain 07].

Le modèle semi-quadratique permet d'accepter un décentrage limite sur le lot de pièces produit [Anselmetti 03c]. Ces modèles nécessitent de connaître la relation entre les tolérances  $t_i$  de la chaîne de cotes et la tolérance fonctionnelle  $t_{cf}$  et font des hypothèses sur les lois statistiques de distribution et de dépendance des variables aléatoires  $t_i$ . Nous avons vu dans ce chapitre comment obtenir la relation de tolérancement, cependant rien ne prouve que les hypothèses de modélisation statistique sont respectées.

### ▷ Tolérancement par zone : approche statistique

Les relations linéaires par morceaux obtenue au pire des cas ne peuvent pas être étendue à une relation quadratique comme précédemment.

Une simulation doit être menée en considérant les tolérances d'écarts géométriques comme des variables aléatoires. Une loi de distribution est affectée à chacune de ces variables aléatoires et le risque de non conformité est simulé par tirage de Monte-Carlo [Germain 07]. En jouant sur l'étendue des variables aléatoires, et avec un nombre de tirages représentatif, on obtient une image du taux de rebut en fonction de la répartition des tolérances.

### ◇ Analyse statistique du tolérancement de l'assemblage axisymétrique sans jeu

Pour le cas de l'assemblage axisymétrique sans jeu présenté sur la figure (3.15), dont le traitement au pire des cas a été étudié précédemment (cf. § II.3), nous choisirons la spécification de la condition fonctionnelle par tolérancement de la surface "11" par rapport à la surface "32", prise en référence (eqn. 3.32).

En statistique, le problème ne peut plus être réduit en un problème plan, l'ensemble des direction de l'espace tridimensionnelle  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  doivent être prise ne compte. Les composantes du torseur écarts de la surface fonctionnelle tolérancée "32" s'obtiennent en fonction des composantes des torseurs écarts des surfaces de liaison. Au point  $O_{32}$ , centre de la surface fonctionnelle tolérancée on obtient le relations suivantes (eqn. 3.69) :

$$\begin{cases} r_x &= 1 * r_{x_{11}} + 1 * r_{x_{21}} + 1 * r_{x_{31}} \\ r_y &= 1 * r_{y_{11}} + 1 * r_{y_{21}} + 1 * r_{y_{31}} \\ t_x &= (1 * t_{x_{11}} + (D_3 + D_1) * r_{y_{11}}) + (1 * t_{x_{21}} + (D_3 + D_2) * r_{y_{21}}) + (1 * t_{x_{31}} + (D_3 - D_2) * r_{y_{31}}) \\ t_y &= (1 * t_{y_{11}} - (D_3 + D_1) * r_{x_{11}}) + (1 * t_{y_{21}} - (D_3 + D_2) * r_{x_{21}}) + (1 * t_{y_{31}} - (D_3 - D_2) * r_{x_{31}}) \\ t_z &= 1 * t_{z_{11}} + 1 * t_{z_{21}} + 1 * t_{z_{31}} \end{cases} \quad (3.69)$$

Contrairement à ce que l'on trouve dans [Chase 96], les relations linéaires entre variables d'écarts, obtenues par les équations de tolérancement, ne sont pas les mêmes que les relations linéaires entre les tolérances des pièces de l'empilage et la tolérance fonctionnelle (l'étendue des surface n'intervient pas).

Une loi de densité de probabilité et de dépendance statistique est affectée à chaque et entre chaque composante de petits déplacements des torseurs écarts affectés aux surfaces de liaison. Pour chaque tirage de type Monte-Carlo, nous obtenons ainsi un torseur écart de la surface fonctionnelle par rapport à la surface de référence. La condition fonctionnelle est respectée si et seulement si le torseur écarts de la surface fonctionnelle tolérancée est inclus dans le domaine condition fonctionnelle (fig. 3.23). Ce résultat peut aussi être obtenu analytiquement par produit de convolution des composantes d'écarts de chaque surface [Germain 07].

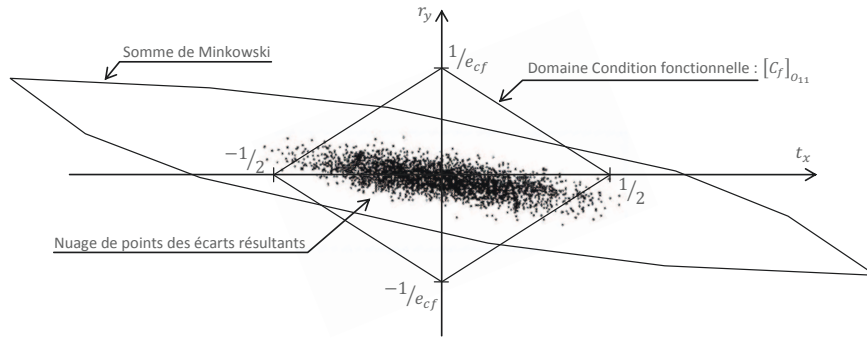


Fig. 3.23 – Nuage de points des écarts résultants générés par tirage de Monte-Carlo

En faisant varier l'étendue des variables aléatoires, et avec un nombre de tirage représentatif, on obtient donc une image du taux de rebuts en fonction de la répartition des tolérances. Des campagnes de mesure en cours de production permettent d'affiner les lois de distribution et de dépendance statistique afin que le modèle statistique soit plus proche du comportement réel.

Au pire des cas, la condition de respect est traduite par l'inclusion du domaine somme de *Minkowski* dans le domaine condition fonctionnelle. Cet exemple illustre bien l'intérêt d'une analyse statistique, puisqu'on conserve un taux de rebuts acceptable (seulement quelques points en dehors du domaine condition fonctionnelle) alors que la condition au pire des cas n'est pas respectée.

#### ◇ Assemblage en série avec jeux

Si l'assemblage présente des jeux, les dimensions géométriques définissant leur étendue sont considérées comme des variables aléatoires. La forme des domaines jeux reste inchangée, seule leur taille est modifiée par les variations géométriques. Suivant le rôle des jeux dans l'assemblages, ceux-ci sont pris en compte différemment :

▷ **Dans le cas d'assemblage avec jeux défavorables**, ils sont pris en compte au même titre que les écarts géométriques.

Dans le cas de jeux non bloqués, le domaine jeux est ajouté aux écarts aléatoires. Les défauts géométrique sont ainsi modélisés par la sommes de *Minkowski* des domaines jeux de taille aléatoire décalés des torseurs écarts aléatoire.

Dans le cas de jeux bloqués, un point sélectionné aléatoirement sur les bords du domaine jeux définit un torseur écarts qui s'ajoute aux autres écarts. Cela revient à faire l'hypothèse que le mécanisme est en butée dans une direction choisie aléatoirement (cette direction peut être générée en la considérant comme une variable aléatoire dont la loi de distribution dépend des conditions d'assemblage et du comportement du système au cours de son cycle de vie).

▷ **Dans le cas d'assemblage avec jeux favorables**, ils sont pris en compte au même titre que la condition fonctionnelle. Pour chaque tirage, la condition fonctionnelle est agrandie du domaine jeux généré. Le torseur écarts résultant doit être inclus dans ce nouveau domaine "condition fonctionnelle" pour que le montage soit accepté. Les variables qui définissent l'étendue du domaine jeu dépendent des dimensions intrinsèques considérées comme variables aléatoires.



## V Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que pour tout système mécanique composé uniquement de liaisons en série, la relation liant le respect au pire des cas d'une exigence fonctionnelle aux tolérances géométriques des différentes surfaces de contact est linéaire par morceaux.

Nous avons donné une méthode systématique pour déterminer les coefficients de ces relations linéaires, qui sont les coefficients d'influence des tolérances sur la tolérance fonctionnelle.

Cette relation permet :

- D'optimiser la géométrie par minimisation des coefficients d'influence.
- De définir le système de spécification maximisant les intervalles de tolérance. En effet, les surfaces à fort coefficient d'influence sont préférentiellement prises en référence afin que leurs écarts deviennent non influents.
- De définir la répartition optimale des tolérances, permettant le respect au pire des cas de la condition fonctionnelle à partir d'une fonction coût de chaque tolérance.

Tout ceci est rendu possible par la résolution simultanée des problématiques de spécification et de synthèse de tolérances. Pour ce faire, nous utilisons une modélisation du tolérancement qui consiste à associer à chaque surface une zone de tolérance définie en fonction de la nature de la surface tolérancée et de la condition fonctionnelle. Ainsi, on s'affranchit totalement de sa définition qualitative, optimisée pendant le calcul.

On remarque cependant que le défaut d'orientation est, dans la majorité des cas, le facteur limitant (sommet du domaine écart influent). Un découplage de la tolérance de localisation et d'orientation permettrait donc d'optimiser encore la valeur des intervalles de tolérance. A défaut d'orientation acceptable fixée, la tolérance de localisation (plus difficile à tenir) pourrait être élargie. Cependant, cette condition supplémentaire modifie la forme du domaine affecté à la surface tolérancée (suppression de sommets). Le rapport entre la valeur de la tolérance de localisation et celle de la tolérance d'orientation doit être fixé afin d'obtenir une nouvelle forme de domaine et réévaluer les coefficients d'influence.

L'approche statistique est relativement simple dans ce cas d'assemblage. Les composantes d'écarts résultant sont des combinaisons des variables aléatoires. Il n'est plus question de domaines écarts. Par contre, lorsque le jeu est favorable, il faut construire un domaine jeux résultant paramétré par des variables aléatoires de dimensions.



– Idée de Gaston™ by Franquin

### Objectifs

*Dans ce chapitre nous nous intéressons aux assemblages présentant des liaisons en parallèle. Ce type d'assemblages introduit de nouvelles contraintes qu'il devient complexe de résoudre par des opérations uniquement linéaires. Dans un premier temps, nous présenterons les conditions sur les domaines assurant le respect des exigences géométriques fonctionnelles au pire des cas. Puis nous orienterons nos études sur l'analyse statistique du tolérancement avec des méthodes de type Monte-Carlo. Ces méthodes sont rendues possibles par la simplification des opérations sur les polytopes grâce à une représentation originale des domaines jeux et écarts. Cette nouvelle représentation a été développée et mis au point au laboratoire SYMME afin d'optimiser l'utilisation de l'outil domaine dans le cadre des problématiques de tolérancement.*

## I Mise en situation

### I.1 Assemblage

Un assemblage avec liaisons en parallèles relie deux pièces par différents chemins d'assemblage. Ces chemins d'assemblage peuvent être directs ou composés de plusieurs pièces et surfaces intermédiaires. Ces derniers peuvent être considérés comme un empilage simple et traités comme tel [Mansuy 11] (cf. chapitre 3). Ceci permet de leur associer un écart et un jeu équivalent et de les réduire en un chemin d'assemblage direct.

Ce type d'assemblage avec liaison en parallèle peut être modélisé par un graphe dont la topologie générique est illustrée ci-dessous (fig. 4.2).

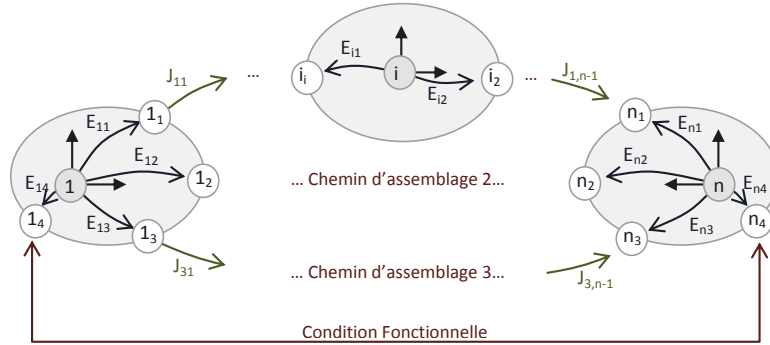


Fig. 4.2 – Topologie générique d'un graphe d'assemblage avec liaisons en parallèle

## I.2 Tolérancement

### I.2.a Tolérancement qualitatif

Nous verrons dans le paragraphe (II) que l'analyse du tolérancement de mécanismes composés de liaisons en parallèle avec la méthode des domaines, implique des opérations non-linéaires de type intersections (min, max). Il n'est donc plus possible d'obtenir une relation linéaire entre les tolérances de l'assemblage  $t_i$  et la tolérance fonctionnelle  $t_{cf}$ . Cette relation était nécessaire à l'optimisation simultanée du tolérancement qualitatif et quantitatif, qui sera désormais définie au préalable.

Nous avons vu au chapitre (1) que la méthode *CLIC* de B. Anselmetti [Anselmetti 06] définit le tolérancement qualitatif par des règles métiers en fonction de la nature et de la fonction des surfaces. Il s'assure ainsi d'obtenir un tolérancement qualitatif en adéquation avec les exigences et besoins fonctionnels identifiés tout au long du cycle de vie du produit.

De la même manière, pour chaque pièce du mécanisme, nous hiérarchisons les surfaces en fonction de la nature de la liaison qu'elles forment. L'ordre dans lequel elles sont utilisées pour mettre en position une pièce est utilisé pour définir le système de référence. La surface ou le groupe de surfaces prépondérant est pris en référence primaire  $A$  et permet de tolérer la surface ou le groupe suivant qui définit ensuite la référence secondaire  $B$ , et ainsi de suite... Chaque surface de même rang est tolérée par rapport au système de référence formé par les surfaces de rang inférieur et s'ajoute au système de référence pour tolérer les surfaces de rang supérieur. Une étude des degrés de liberté des groupes de surfaces permet de conseiller le concepteur ou de vérifier la cohérence de la spécification choisie [Legrais 05].

Le système de référence, de par sa construction, permet de définir le repère de la pièce sur laquelle il s'applique. C'est à partir de ce repère que sont évalués les écarts relatifs de position et d'orientation de chaque surface réelle de liaison. De même, les écarts relatifs entre deux pièces sont évalués par la position et l'orientation relative de leur repère pièce ainsi construit.

La modélisation par domaines permet également de prédéfinir la répartition de tolérance en répartissant le domaine condition fonctionnelle  $[C_f]$  sur l'ensemble des surfaces tolérancées. À chaque surface est affecté un domaine écarts, partition du domaine condition fonctionnelle. Dans la mesure du possible, ce domaine écart peut être traduit par un tolérancement normalisé [Giordano 09].

### I.2.b Conditions de fonctionnalité

Cette typologie est en général hyperstatique donc le montage n'est pas forcément assuré. La fonctionnalité du mécanisme devra donc être étudiée à travers deux axes :

- **Une condition de précision :** Position et orientation relative des repères associés aux surfaces fonctionnelles des pièces terminales.

- **Une condition d'existence** : Évaluation des jeux à l'intérieur des chemins d'assemblage afin d'assurer le montage sans précontraintes [Sampet 07].

L'exigence géométrique fonctionnelle est modélisée à l'aide du tolérancement par zone, conformément à la norme internationale [NF-EN-ISO-1101 06, ISO-8015 85] comme précédemment (cf. chapitre 3). Nous appelons  $t_{cf}$  la valeur de la tolérance et  $[C_f] = t_{cf} * [c_f]$  le domaine associé à cette condition fonctionnelle.

### I.3 Défauts et mobilités internes

En se plaçant toujours dans les conditions de petits déplacements de solides rigides, les mobilités sont exprimées par le torseur de petits déplacements défini précédemment (eqn. 3.1). Les domaines jeux  $[J] = j * [j]$  sont construits à partir de l'hypothèse d'impénétrabilité de la matière, et les domaines écarts  $[E] = t * [e]$  par la limitation des mouvements de la surface à l'intérieur de sa zone de tolérance associée.

Dans le cas des liaisons en parallèle, il existe plusieurs chemins d'assemblage. Les degrés de liberté des zones de tolérance affectées à chaque surface de liaison, ne sont donc pas forcément les mêmes que les degrés de liberté de la zone associée à la condition fonctionnelle. Chaque chemin d'assemblage représente un empilage simple. Son tolérancement peut donc être modélisé en associant à chaque surface  $s$  de la pièce  $p$  une zone de tolérance  $t_{ps}$  de degré de liberté dépendant de la nature des surfaces de liaisons de l'ensemble du chemin d'assemblage (cf. chapitre 3) (toutes les zones de tolérance d'un même chemin d'assemblage ont les mêmes degrés de liberté). On obtient ainsi un tolérancement en "zone liée" de chaque chemin d'assemblage, indépendamment les uns des autres, en s'affranchissant de la définition qualitative.

L'analyse du tolérancement par l'approche pire des cas et par l'approche statistique ne fait pas appel à la même mise en équation pour cette typologie de mécanisme. Pour chacune de ces études, nous allons décrire, sur un exemple d'assemblage didactique, la méthode originale mise en place, puis nous exposerons un algorithme général de résolution.

## II Approche pire des cas

Au pire des cas, on cherche à exprimer le respect de l'exigence fonctionnelle sous la forme d'un système d'inéquations linéaires reliant la tolérance fonctionnelle  $t_{cf}$  aux tolérances associées aux surfaces de liaison  $t_{ps}$ . Dans le cas d'une étude unidirectionnelle, ces inéquations sont obtenues en établissant les chaînes de cotes puis en écrivant les relations au pire des cas. Dans le cas tridimensionnel, la définition et l'énumération des configurations d'assemblage au pire des cas est plus complexe. En effet, une exigence fonctionnelle ne peut plus se réduire à une seule direction d'analyse (ou deux dans le cas de tolérance bi-limite).

Les conditions fonctionnelles sont exprimées sous la forme de zones de tolérance. Avec la méthode des domaines, chaque zone de tolérance est modélisée par un polytope convexe. Les frontières de ce polytope convexe sont composées de différentes facettes que nous avons appelées "conditions fonctionnelles élémentaires". De la même manière qu'avec les droites d'analyse de B. Anselmetti [Anselmetti 06], chacune de ces "conditions fonctionnelles élémentaires" génère une équation de tolérancement. L'avantage de la méthode des domaines est que l'ensemble des conditions fonctionnelles élémentaires sont générées automatiquement lors de la modélisation de la zone de tolérance fonctionnelle sous forme de polytope convexe.

Bien que les approches de B. Anselmetti et M. Giordano semblent différentes, elles permettent toutes les deux d'obtenir le même système d'équations, associé à une tolérance fonctionnelle.

L'outil "domaine" permet de construire systématiquement le système minimal d'équations et d'inéquations scalaires décrivant entièrement le respect de l'exigence géométrique fonctionnelle. Dans la mesure où l'ensemble des conditions fonctionnelles élémentaires sont incluses dans le modèle domaine, le problème peut être formalisé sous la forme d'une seule et unique condition reliant les domaines "jeux", "écarts" et "condition fonctionnelle" pour chaque tolérance fonctionnelle (de la même manière que les problèmes de mécanique peuvent être écrits de manière simplifiée à l'aide de modèle de type torseur regroupant différents vecteurs). Ainsi, les directions d'analyse à prendre en compte sont automatiquement générées sans risque d'oubli ou de redondance.

Par la suite, le traitement de problèmes de tolérancement tridimensionnel consistera à manipuler des domaines et non plus des scalaires. Les équations scalaires seront générées le plus tard possible à partir des domaines résultats obtenus. Par soucis de clarté, seule la relation entre les domaines, permettant le respect de la condition fonctionnelle, sera décrite. Les algorithmes permettant d'effectuer les calculs sur les domaines seront étudiés en détail dans un second temps (cf. § V).

## II.1 Méthode générique des domaines

Pour chaque chemin d'assemblage "c", différents type de domaines jeux sont définis [Petit 04] :

- **Le domaine jeux d'empilage**  $[J_c] = j_c * [j_c]$  : somme de *Minkowski* de l'ensemble des domaines jeux des liaisons composant le chemin d'assemblage "c".
- **Le domaine jeux décalés**  $[J_{c,dec}]$  : soit  $\vec{E}_c$  le torseur écarts résultant du cumul des défauts dans le chemin d'assemblage c :  $[J_{c,dec}] = \vec{E}_c + [J_c]$ .
- **Le domaine jeux résiduels**  $[J_{c,r}]$  : intersection de l'ensemble des domaines jeux décalés  $[J_{c,dec}]$  lorsque  $\vec{E}_c$  parcourt l'ensemble du domaine écarts résultant  $[E_c]$  du chemin d'assemblage "c". Le domaine jeux résiduels  $[J_{c,r}]$  représente l'ensemble des positions et orientations toujours atteignables par la surface terminales du chemin d'assemblage "c", quels que soient les défauts.
- **Le domaine jeux résultants**  $[J_r]$  : intersection de l'ensemble des domaines jeux résiduels  $[J_{c,r}]$  de chaque chemin d'assemblage "c". Ce domaine représente l'ensemble des positions et orientations toujours atteignables par la surface terminale quels que soient les écarts géométriques.
- **Le domaine d'imprécision d'empilage**  $[I_c]$  : ensemble de toutes les positions et orientations atteignables par la surface terminale du chemin d'assemblage "c" (somme de *Minkowski* des domaines écarts et jeux du chemin d'assemblage "c").
- **Le domaine d'imprécision résultant**  $[I]$  : intersection de l'ensemble des domaines d'imprécision d'empilage  $[I_c]$ . Ce domaine représente toutes les positions et orientations dans lesquelles peut se retrouver la surface terminale.

Suivant la fonctionnalité étudiée ou le type de prise en compte des jeux dans l'assemblage, le respect de l'exigence fonctionnelle au pire des cas est traduit par différentes conditions sur les domaines jeux calculés :

- **Condition d'existence** : Une condition suffisante de montabilité est que le domaine jeux résultant existe (intersection non nulle).
- **Condition de précision** :
  - ▷ *Respect de la condition fonctionnelle avec jeux favorables* ( $\exists$ ) : Une condition suffisante de respect de l'exigence géométrique est que l'intersection du domaine jeux résultant  $[J_r]$  avec le domaine condition fonctionnelle  $[C_f]$  soit non nulle (inclusion partielle du domaine jeux résultant  $[J_r]$  dans le domaine condition fonctionnelle  $[C_f]$ ).

D'après les résultats obtenus au chapitre 3 (cf. § III.3), pour la condition de montabilité et pour la condition de respect avec jeux favorables, le domaine jeux résultants est défini au maximum de matière.

- ▷ *Respect de la condition fonctionnelle avec jeux défavorables* ( $\forall$ ) : L'exigence géométrique est respectée si et seulement si le domaine somme de *Minkowski* des domaines écarts des deux surfaces fonctionnelles et du domaine d'imprécision résultant  $[I]$  est totalement inclus dans le domaine condition fonctionnelle  $[C_f]$ .

D'après les résultats obtenus au chapitre 3 (cf. § III.1), le domaine d'imprécision résultant  $[I]$  est défini au minimum de matière.

Le système d'équations scalaires de tolérancement correspond au système définissant le domaine résultat. Les conditions sur ce domaine génèrent les inéquations de respect au pire des cas de la condition fonctionnelle.

## II.2 Exemple didactique : liaison plan/plan et cylindre/cylindre

Afin d'illustrer notre propos, nous proposons d'appliquer notre méthode d'analyse sur un exemple didactique. Nous allons étudier la montabilité et la précision de positionnement d'un assemblage composé d'une liaison plan/plan maintenue et d'une liaison cylindre/cylindre avec jeux (fig. 4.3).

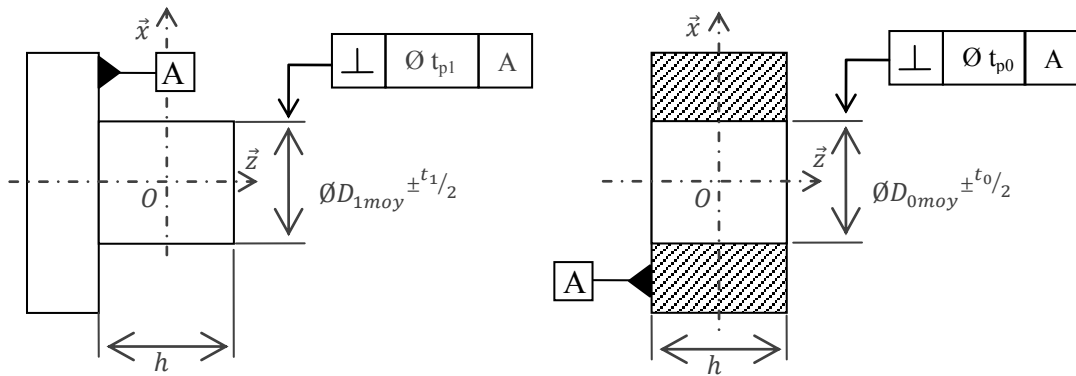


Fig. 4.3 – Tolérancement d'un assemblage plan/plan et cylindre/cylindre

Dans cet exemple très simple, 5 paramètres définissent le tolérancement :

- Le jeu moyen  $J_{moy} = D_{0moy} - D_{1moy}$ .
- Les deux tolérances dimensionnelles  $t_0$  et  $t_1$ .
- Les deux tolérances d'orientation  $t_{p0}$  et  $t_{p1}$ .

Le problème consiste donc :

1. *Au pire des cas* : à déterminer la relation entre ces paramètres pour assurer l'assemblage sans déformation avec appui plan maintenu et à déterminer l'écart maximal de mise en position relative des pièces.
2. *En statistique* : à déterminer le taux d'assemblages non montables et la loi de répartition des écarts de mise en position pour des tolérances choisies et des lois de distributions des écarts données.

## II.2.a Modélisation

### ◇ Assemblage

D'après le tolérancement qualitatif défini précédemment (fig. 4.3), on obtient le graphe d'assemblage illustré ci-dessous (fig. 4.4).

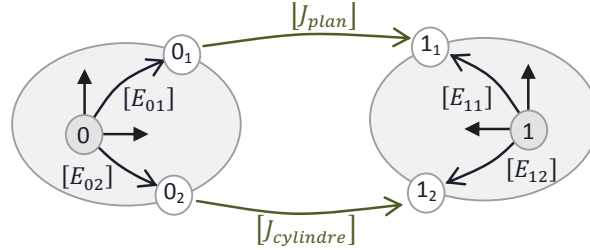


Fig. 4.4 – Graphe d'assemblage de la liaison plan/plan et cylindre/cylindre

Les plans pris en référence définissent le repère nominal de la pièce. Ils ne présentent donc pas d'écarts géométriques  $[E_{01}] = [E_{11}] = [0]$ .

### ◇ Domaines écarts

Les autres surfaces étant prises en référence, seules les surfaces cylindriques présentent des défauts. Le domaine écarts associé représente les petits déplacements autorisés par l'axe réel de la surface supposée cylindrique, à l'intérieur d'une zone de tolérance cylindrique de diamètre  $t_{pi}$  d'axe perpendiculaire à sa référence  $A$ . En prenant en compte l'étendue des surfaces, les composantes de petits déplacements de la surface tolérancée "i" respectent le système d'inéquations suivant (eqn. 4.1) définissant les domaines écarts  $[E_{02}]$  &  $[E_{12}]$  :

$$\forall i \in \{0; 1\}; \quad [E_{i2}] = \left\{ \frac{t_{pi}}{h} \geq \sqrt{r_{xi}^2 + r_{yi}^2} \right. \quad (4.1)$$

Le domaine écarts  $[E_c]$  résultant du chemin d'assemblage correspondant aux liaisons cylindre-cylindre s'obtient en sommant l'ensemble des écarts  $[E_{02}] \oplus [E_{12}]$ .

### ◇ Domaines jeux

▷  $J_{plan}$

L'appui plan étant maintenu, son domaine jeux est nul dans les directions  $(t_z; r_x; r_y)$  et de dimension infinie suivant ses degrés de liberté  $(t_x; t_y; r_z)$ .

▷  $J_{cylindre}$

En prenant en compte l'étendue des surfaces cylindriques et la condition d'impénétrabilité de la matière, les composantes de petits déplacements respectent le système d'inéquations suivant et définissent le domaine jeux de la liaison cylindre-cylindre  $[J_{cylindre}]$  (eqn. 4.2) :

$$\text{Soit } J = D_0 - D_1; \quad [J_{cylindre}] = \left\{ \frac{J}{2} \geq \sqrt{\left(t_x + \epsilon * \frac{h}{2} * r_y\right)^2 + \left(t_y - \epsilon * \frac{h}{2} * r_x\right)^2} \quad \text{avec } \epsilon = \pm 1 \right. \quad (4.2)$$

## II.2.b Calculs

Une condition suffisante de montabilité est l'existence du domaine intersection des domaines "jeux résiduels". Les différents domaines jeux (décalés et résiduels) de chaque chemin d'assemblage (appui plan et liaison cylindre-cylindre) vont donc être calculés et leur intersection évaluée.

### ◊ Liaison Appui-plan

Il n'existe aucun écart géométrique dans ce chemin d'assemblage. Le domaine jeu  $[J_{plan}]$  ne peut donc pas être décalé et le domaine jeu résiduel est égal au domaine jeu du chemin d'assemblage.

### ◊ Liaison cylindre-cylindre

Le domaine jeu  $[J_{cylindre}]$  peut être décalé de l'ensemble des écarts géométriques  $\vec{E}_c$  appartenant au domaine écarts résultant  $[E_c]$ . Le domaine jeu décalé est donc caractérisé par le système d'inéquations définissant le domaine jeux  $[J_{cylindre}]$  (eqn. 4.2), auquel sont ajoutées les composantes d'écarts  $\vec{E}_c = r_{x,c} * \vec{r}_x + r_{y,c} * \vec{r}_y$  :

$$[J_{cylindre,decale}] = \left\{ \frac{J^2}{4} \geq \left( t_x + \epsilon * \frac{h}{2} * (r_y + r_{y,c}) \right)^2 + \left( t_y - \epsilon * \frac{h}{2} * (r_x + r_{x,c}) \right)^2 \right. \quad \text{avec } \epsilon = \pm 1 \quad (4.3)$$

Le domaine jeu résiduel correspond à l'intersection des domaines jeux décalés par l'ensemble des écarts géométriques  $[E_c]$  (fig. 4.5).

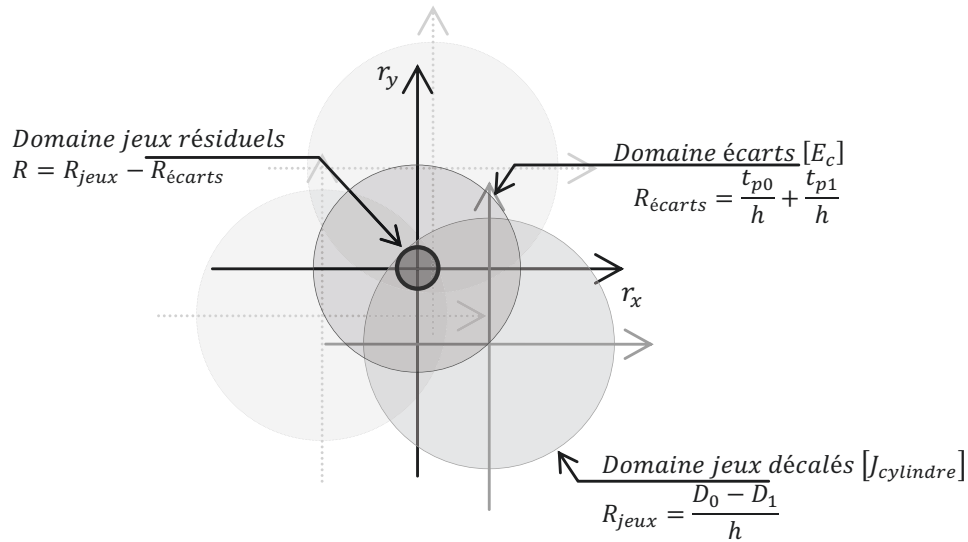


Fig. 4.5 – Illustration de l'obtention du domaine jeu résiduel

### ◊ Intersection des domaines jeux résiduels

L'assemblage est possible au pire des cas si l'intersection des domaines jeux résiduels existe (non vide). Cette intersection définit un domaine appelé domaine jeux résultant.

Dans cet exemple particulier, pour chaque chemin d'assemblage, si le domaine jeux résiduel existe, il contient le point origine. Les domaines jeux résiduels ont donc toujours un point en commun, l'origine. Dans ce cas, la seule preuve de l'existence des deux domaines jeux résiduels suffit pour prouver que leur intersection est non vide.



Le domaine jeux résiduels de la liaison appui-plan est toujours défini. Il suffit donc que le domaine jeux résiduels de la liaison cylindre-cylindre existe pour que l'intersection soit non vide.

Soit  $\{D\} = \begin{Bmatrix} R_x & T_x \\ R_y & T_y \\ R_z & T_z \end{Bmatrix}$  le torseur de petits déplacements de la pièce 1 par rapport à la pièce 0 écrit au point  $O$  centre de l'assemblage. L'intersection des deux domaines jeux résiduels s'écrit (eqn. 4.4) :

$$\left\{ \frac{J^2}{4} \geq \left( T_x + \epsilon * \frac{h}{2} * (0 + r_{y,c}) \right)^2 + \left( T_y - \epsilon * \frac{h}{2} * (0 + r_{x,c}) \right)^2 \right. \quad \text{avec } \epsilon = \pm 1 \quad (4.4)$$

La condition d'assemblage se traduit donc mathématiquement par :

"Pour un couple d'écart  $(r_{x,c}, r_{y,c})$  et un jeu  $J = D_0 - D_1$  donnés, existe-t-il un couple de valeurs  $T_x$  et  $T_y$  tel que les inéquations précédentes soient vérifiées".

Cette condition est illustrée graphiquement ci-dessous (fig. 4.6) :

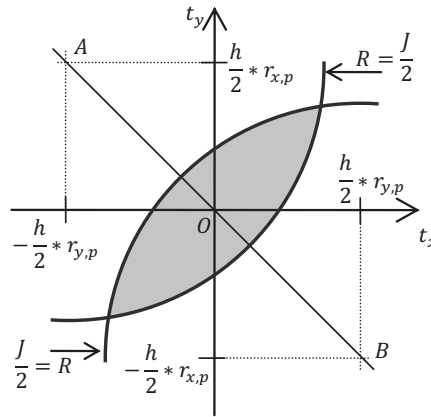


Fig. 4.6 – Condition d'assemblage

Il existe une solution si et seulement si  $R = \frac{J}{2} \geq OA$ . La condition de montabilité se traduit donc par l'équation scalaire (eqn. 4.5) :

$$\frac{J}{2} - \sqrt{\left( \frac{h}{2} * r_{y,c} \right)^2 + \left( \frac{h}{2} * r_{x,c} \right)^2} \geq 0; \quad \text{Soit; } J - h * \sqrt{r_{y,c}^2 + r_{x,c}^2} \geq 0 \quad (4.5)$$

Au pire des cas (maximum de matière :  $J = D_{0_{moy}} - \frac{t_0}{2} - D_{1_{moy}} - \frac{t_1}{2}$  et écarts géométriques maximaux :  $\sqrt{r_{y,c}^2 + r_{x,c}^2} = \frac{t_{p0} + t_{p1}}{h}$ ) l'équation précédente (eqn. 4.5) s'écrit (eqn. 4.6) :

$$\left( D_{0_{moy}} - \frac{t_0}{2} - D_{1_{moy}} - \frac{t_1}{2} \right) - (t_{p0} + t_{p1}) \geq 0 \quad (4.6)$$

On retrouve la condition d'assemblage attendue.

En prenant un jeu moyen  $J_{moy} = D_{0_{moy}} - D_{1_{moy}} = 100\mu m$  et en cherchant une répartition de tolérances uniforme, on obtient, pour la condition de montabilité au pire des cas, le tolérancement suivant :

$$t_0 = t_1 = t_{p0} = t_{p1} = 33\mu m \quad (4.7)$$

L'étude de l'écart radial de mise en position  $D$  maximum au pire des cas, donne la relation suivante :

$$D = \frac{1}{2} * \left( J_{moy} + \frac{t_0}{2} + \frac{t_1}{2} \right) \quad (4.8)$$

Le tableau ci-dessous (tab. 4.1) synthétise la méthode d'étude de la montabilité et du défaut de mise en position avec l'outil domaine.

	$r_x$	$r_y$	$r_z$	$t_x$	$t_y$	$t_z$
$[J_{plan}]$	0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
$[E_{plan}] = [E_{01}] \oplus [E_{11}]$	0	0	0	0	0	0
$[J_{plan,residuel}] = [J_{plan}] \ominus [E_{plan}]$	0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
$[J_{cylindre}]$	$\pm \frac{J}{h}$	$\pm \frac{J}{h}$	$\infty$	$\pm \frac{J}{2}$	$\pm \frac{J}{2}$	$\infty$
$[E_{cylindre}] = [E_{02}] \oplus [E_{12}]$	$\pm \frac{t_{p0}+t_{p1}}{h}$	$\pm \frac{t_{p0}+t_{p1}}{h}$	0	0	0	0
$[J_{cyl,residuel}] = [J_{cylindre}] \ominus [E_{cylindre}]$	$\pm \frac{J-(t_{p0}+t_{p1})}{h}$	$\pm \frac{J-(t_{p0}+t_{p1})}{h}$	$\infty$	$\pm \frac{J}{2}$	$\pm \frac{J}{2}$	$\infty$
$[J_{resultant}] = \cap([J_{plan,residuel}], [J_{cyl,residuel}])$	0	0	$\infty$	$\pm \frac{J}{2}$	$\pm \frac{J}{2}$	0
$[I_{plan}] = [J_{plan}] \oplus [E_{plan}]$	0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
$[I_{cylindre}] = [J_{cylindre}] \oplus [E_{cylindre}]$	$\pm \frac{J+(t_{p0}+t_{p1})}{h}$	$\pm \frac{J+(t_{p0}+t_{p1})}{h}$	$\infty$	$\pm \frac{J}{2}$	$\pm \frac{J}{2}$	$\infty$
$[I] = \cap([I_{plan}], [I_{cylindre}])$	0	0	$\infty$	$\pm \frac{J}{2}$	$\pm \frac{J}{2}$	0

Table 4.1 – Synthèse de l'étude de montabilité et de défaut de mise en position par l'outil domaine

On peut avoir l'impression dans cet exemple que l'outil est compliqué pour résoudre un problème simple, mais le caractère général de cette méthode permet de résoudre plus simplement des problèmes complexes.

## III Approche statistique

### III.1 Méthode d'analyse des tolérances

Les exigences au pire des cas deviennent rapidement très contraignantes avec le nombre de surfaces de liaison. Il devient alors intéressant d'étudier l'évolution du taux de rebuts en fonction des paramètres géométriques et de l'élargissement des tolérances.

Dans le cas de l'empilage en série, nous avons vu que les problèmes de tolérancement pouvaient être écrits sous forme d'inéquations linéaires. L'étude statistique était menée à partir de ces relations linéaires. Cependant, dans le cas d'assemblage avec liaisons en parallèle, le domaine résultant est obtenu par des opérations d'intersection. Ces opérations ne sont pas linéaires et rendent l'obtention d'inéquations linéaires complexe. En effet, la forme du domaine intersection dépend de manière non linéaire (linéaire par morceaux) de la répartition de tolérance choisie dans chaque chemin d'assemblage. Le nombre de formes

de domaines possibles (portion linéaire) croit très rapidement avec le nombre de chemins d'assemblage intersectés. Il devient alors impossible de décrire le domaine résultant comme le produit d'un paramètre de taille avec un domaine unitaire.

Pour cette topologie de mécanismes, nous nous concentrerons sur l'analyse statistique du tolérancement. Le tolérancement qualitatif est défini au préalable par des règles en fonction de la nature des surfaces et de leurs fonctions (cf. § 1.2.a).

Pour réaliser cette analyse statistique du tolérancement, on utilise une simulation de type Monte Carlo avec les variables aléatoires suivantes :

- *Les composantes de petits déplacements des torseurs écarts* : Ces variables aléatoires générées pour chaque surface tolérancée représentent les défauts de position et d'orientation des surfaces de liaison.

On ne manipule donc plus de domaine écarts lors de l'analyse statistique. Seuls les torseurs aléatoirement générés sont utiles au calcul. Cependant, la forme des domaines peut être utilisée pour définir les densités de probabilité et les lois de dépendance statistique des variables aléatoire dans leur zone de tolérance associée. Dans le cas d'utilisation de modificateur de type "maximum de matière", l'écart type de la loi de distribution statistique du paramètre de taille du domaine écarts dépend des dimensions géométriques. La forme du domaine, quant à elle, reste immuable et les points du torseur écarts aléatoire peuvent être tiré à l'intérieur de se domaine.

- *Les dimensions géométriques* : Ces variables aléatoires générées pour chaque liaison définissent la taille du domaine jeux correspondant.

Lors de l'analyse statistique, la forme des domaine jeux est conservée. Seule la taille, paramétrée par un scalaire  $J$  est une variable aléatoire. Cette propriété illustre l'intérêt de modéliser les jeux internes aux assemblages par un outil de type "domaine jeux".

En utilisant la méthode de Monte-Carlo, pour chaque tirage, on construit les domaines jeux décalés des écarts de chaque chemin d'assemblage et on en déduit les domaines résultants. On peut alors vérifier :

- *La montabilité* : l'assemblage est possible si l'intersection des domaines jeux décalés existe.
- *Les défauts de mise en position* : Si l'assemblage est possible, les défauts de mise en position peuvent être évalués de deux manières :
  - ▷ Lorsqu'ils doivent respecter une exigence géométrique fonctionnelle : La condition fonctionnelle est respectée si le domaine d'imprécision résultant est inclus dans le domaine condition fonctionnelle.
  - ▷ Lorsqu'ils doivent être pris en compte dans un assemblage global (cf. chapitre 5) : En fonction du rôle des jeux dans la boucle d'assemblage, le domaine jeux résultant est pris en compte de deux manières différentes :
    - Dans le cas de jeux favorables : le domaine jeux résultant est considéré comme le domaine jeux équivalent de la liaison.
    - Dans le cas de jeux défavorables : la configuration dans le domaine jeux résultant est considéré comme l'écart équivalent de la liaison.

La qualité de la simulation dépend évidemment du nombre de tirages effectués et des lois statistiques choisies pour chaque variable aléatoire. Un test de convergence des résultats permet de définir le nombre optimal de tirages significatifs et des campagnes de mesure tout au long du cycle de production permettent d'affiner les lois de densité de probabilité et les éventuelles dépendances statistiques des variables aléatoires.

### III.2 Exemple didactique : liaison plan/plan et cylindre/cylindre

En appliquant cette méthode d'analyse statistique sur l'exemple didactique précédent (fig. 4.3), nous pouvons simuler le taux de mécanismes non montables en fonction de la répartition de tolérances choisie.

Pour chaque tirage, l'assemblage est assuré si l'intersection des domaines jeux décalés pour chaque chemin d'assemblage existe. Dans ce cas particulier, la condition peut s'exprimer analytiquement par l'inéquation (eqn. 4.9).

$$J_r = J - h * \sqrt{r_{y,c}^2 + r_{x,c}^2} \geq 0 \quad \text{avec : } \begin{cases} J = D_0 - D_1 \\ r_{x,c} = r_{x,0} - r_{x,1} \\ r_{y,c} = r_{y,0} - r_{y,1} \end{cases} \quad (4.9)$$

Pour chaque tirage,  $J_r$  représente l'étendue du jeu résultant. La valeur de  $J_r$  est aléatoire et dépend de 6 variables supposées indépendantes ( $D_0, D_1, r_{x,0}, r_{x,1}, r_{y,0}, r_{y,1}$ ).

Les densités de probabilité sont supposées uniformes et centrées :

- Les dimensions  $D_0$  et  $D_1$  sont uniformément réparties sur leur intervalle de tolérance.
- Les composantes de rotation sont uniformément réparties dans leur zone de tolérance (répartition uniforme sur le disque du domaine écart).

Ces densités de probabilité peuvent être affinées par traitement de campagnes de mesure à différentes étapes du cycle de production du produit final afin d'être plus proche du comportement réel des dispersions (dépendance de certaines variables, loi de distribution particulières,...).

Dans les hypothèses de distributions précédentes, pour  $10^7$  tirages, la répartition de la variables fonctionnelle  $J_r$  est illustrée ci-dessous (fig. 4.7) :

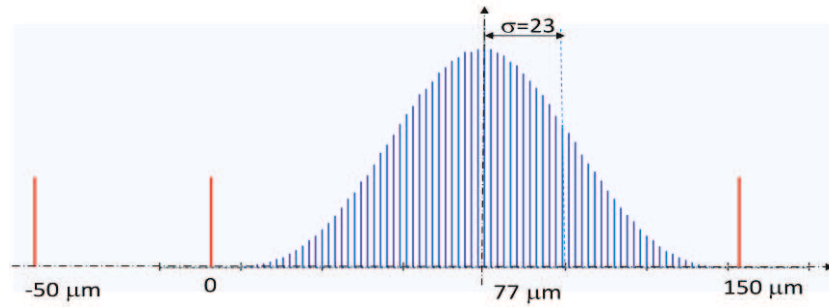


Fig. 4.7 – Répartition de la variable aléatoire  $J_r$  avec  $t_0 = t_1 = 50\mu m$  et  $t_{p0} = t_{p1} = 50\mu m$

Tant que  $J_r \geq 0$ , la condition de montabilité est respectée. Les lois de distribution uniformes sur les différentes variables aléatoires permettent d'élargir les intervalles de tolérances par rapport à ceux calculés au pire des cas tout en gardant un risque de rebut très faible. Cette simulation avec des densité de probabilité uniformes correspond à une première approche pessimiste. Un calcul avec des variables suivant des lois de distribution normales avec des indices de capabilité fixé, donne un taux de rejets encore plus faible.

Le tableau ci-dessous (tab. 4.2) présente les résultats obtenus en fonction de la valeur des tolérances choisies. Avec  $J$  la valeur du jeux résultant et  $D$  le défaut radial évalué en sélectionnant aléatoirement un point sur le bord du domaine jeux résultant.

Répartition de tolérance		Données statistiques d'assemblage			Pire des cas		Données statistiques de position		Pire des cas
$t_0 = t_1$	$t_{p0} = t_{p1}$	$J_{moyen}$	$\sigma_{jeux}$	$ppm$	$J_{min}$	$J_{max}$	$D_{moyen}$	$\sigma_D$	$D_{max}$
40	40	81,9	18,4	0	-20	140	43,6	9,2	70
50	50	77,4	23	0	-50	150	42	11,6	75
55	55	75	25,3	102	-65	155	41	12,8	77,5
40	40M	70,6	20,9	0	-20	140	39,2	10,5	70
45	45M	66,9	23,5	307	-35	145	37,6	11,9	72,5
60	60M	79	19,3	0	-20	160	42,6	9,6	80
70	70M	75,6	22,6	1	-40	170	41,2	11,3	85
75	75M	73,9	24,2	73	-50	175	40,5	12,2	87,5

Table 4.2 – Résultats de l'analyse statistique

La lettre "M" dans la seconde colonne indique l'utilisation du modificateur au "maximum de matière". La prise en compte de ce modificateur lors de la simulation statistique passe par une dépendance de l'étendue du domaine de variation aléatoire du paramètre de taille du domaine écart associé à la tolérance au maximum de matière en fonction des dimensions géométriques aléatoires générées.

On remarque que les tolérances peuvent être augmentées de  $33\mu m$  au pire des cas jusqu'à  $51\mu m$  tout en conservant un taux de rebuts inférieur à 1ppm (partie par million).

Il est également intéressant de constater que dans le cas de tolérancement avec indicateur de maximum de matière, le gain obtenu par une étude statistique est moins important que lors du tolérancement sans indicateur. Cela prouve l'efficacité de cet indicateur qui permet d'accepter plus d'assemblages au pire des cas. En effet, certains assemblages rejetés sans l'indication de maximum de matière sont acceptés avec le modificateur car ils permettent l'assemblage. La simulation statistique, de son côté, accepte tous les assemblages générés aléatoirement qui peuvent s'assembler. On mesure donc, ici, la pertinence des modèles de tolérancement.

## IV Algorithme générique d'analyse du tolérancement

L'analyse du tolérancement de l'exemple très simple présenté précédemment peut être traité de manière analytique au pire des cas ou en statistique. La comparaison des résultats obtenus est un premier test de validation de la méthode des domaines utilisée.

La démarche de modélisation et de résolution avec l'outil domaine qui a été menée, peut aisément se généraliser à toute la famille de systèmes tridimensionnels plus complexes, dont la topologie générique est modélisée en figure (4.2). La mise en équation du problème et les calculs se ramènent à des opérations sur les polytopes.

L'algorithme générique d'analyse du tolérancement est décrit ci-dessous (fig. 4.8) :

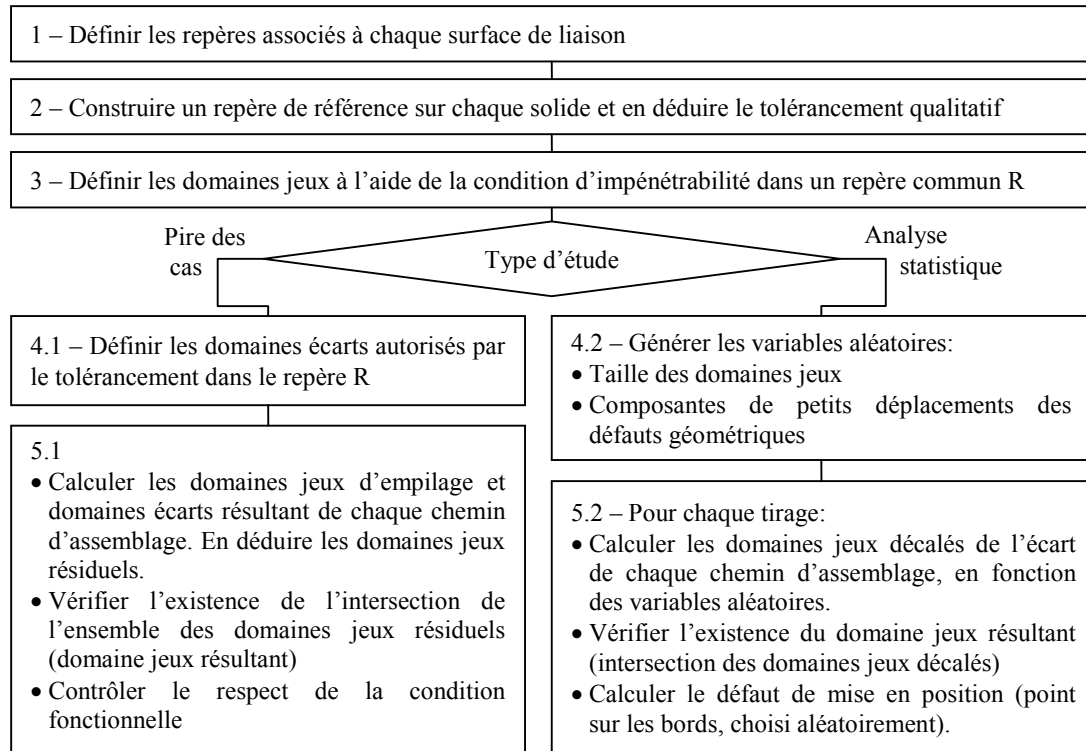


Fig. 4.8 – Algorithme générique d'analyse de tolérancement

La mise en équation et le traitement des problématiques d'analyse de tolérances au pire des cas ou statistique de tout type d'assemblage avec liaisons en parallèle sont définis de manière générique par un algorithme formel. En effet, jusqu'à présent, ce type de problème était résolu en réduisant au cas par cas les liaisons en parallèle en liaison simple, grâce à une base de données d'exemples d'assemblages [Chavanne 09a], ou en considérant uniquement des liaisons isostatiques [Singh 09].

## IV.1 Analyse d'assemblages avec liaisons en parallèles

Grâce à la modélisation par domaines, l'analyse d'assemblages hyper-statiques devient possible. Cette condition s'exprime sous la forme d'une simple intersection de domaines.

### IV.1.a Analyse de l'assemblage comme une somme de *Minkowski*

Nous avons vu au paragraphe II.4.c du chapitre 1 que J.K. Davidson parvient avec la méthode des T-maps® à déterminer le jeu résultant de liaisons en parallèle avec une simple somme de *Minkowski* [Singh 09]. Il présente l'exemple d'un mécanisme centreur composé de 3 pions dans leur rainure et d'un appui-plan (fig. 1.31).

Les déplacements de la pièce 1 par rapport à la pièce 2, autorisés par le jeu dans les différentes liaisons, sont calculés au point  $P$  centre de l'assemblage. Pour ce faire, les petits déplacements  $\delta_c$  du point  $P$  obtenus lorsque l'on parcourt l'étendue des jeux du chemin  $c$  en conservant les autres chemins d'assemblage dans leur position nominale sont calculés. Pour chaque liaison pion-rainure, un déplacement résultant  $\delta_c$  est obtenu. Ce déplacement  $\delta_c$  est porté par la droite perpendiculaire à la droite  $(EP)$  où  $E$  est le Centre Instantané de Rotation (CIR) (fig. 4.9). La liaison appui-plan permet de se limiter à un problème plan.

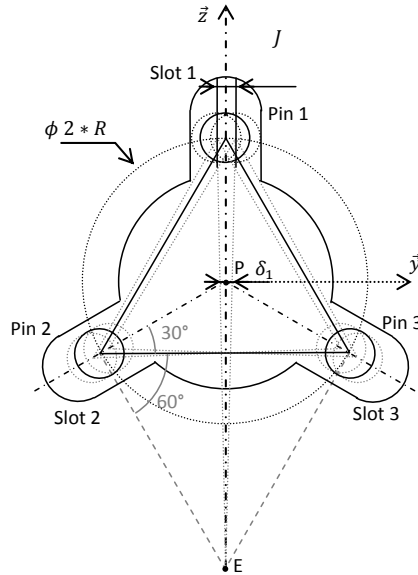


Fig. 4.9 – Calcul du petit déplacement induit par les jeux du chemin d'assemblage 1 au point  $P$  [Singh 09]

Le déplacement résultant global s'obtient en sommant les déplacements obtenus en faisant varier chaque chemin d'assemblage indépendamment des autres. Le T-maps® jeux résultants (fig. 4.10(b)) correspond donc à la somme de *Minkowski* des 3 déplacements  $\delta_c$  calculés précédemment (fig. 4.10(a)). En considérant  $J$  la valeur du jeu introduit par chaque liaison pion-rainure, on obtient un hexagone inscrit dans un cercle de diamètre  $t_{cf} = \frac{8}{3} * J$ .

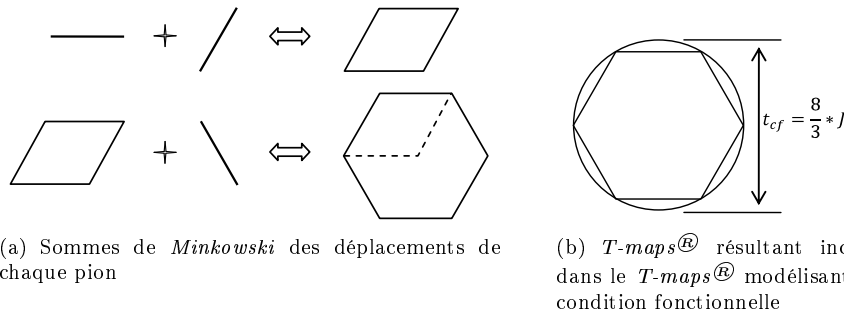


Fig. 4.10 – Obtention du T-maps® modélisant les mouvements relatifs entre les pièces 1 et 2

Cette méthode bien connue dans l'analyse cinématique de structures articulées exige toutefois une indépendance des différents chemins d'assemblage. En effet, il doit être possible de parcourir l'ensemble de l'étendue des jeux de chaque chemin d'assemblage sans sortir de la configuration nominale des autres chemins d'assemblage. Autrement dit, cela exige de travailler sur des assemblages ne présentant aucun degré d'hyperstatisme.

#### IV.1.b Analyse de l'assemblage comme une intersection de domaines

La modélisation sous forme d'intersection de domaines, plus complexe dans cet exemple d'assemblage auto-centreur mais généralisable à tous types d'assemblage, nous donne le même résultat :

La liaison appui-plan de normale  $\vec{x}$  est considérée parfaite. Elle bloque donc les petits déplacements  $r_y, r_z$  et  $t_x$  sans jeux.

Soit  $\theta_i$  l'angle entre l'axe  $\vec{x}$  et l'axe médian de la rainure  $i$  et  $J$  la valeur du jeu (différence entre la largeur de la rainure et le diamètre du pion). Le domaine jeux  $[J_i]$  relatif à la liaison pion-rainure  $i$  s'écrit au point  $P$  centre de l'assemblage :

$$J_i = \begin{cases} -R * \frac{J}{2} & \leq r_x \leq R * \frac{J}{2} \\ -\frac{J}{2} * \cos\theta_i & \leq t_y \leq \frac{J}{2} * \cos\theta_i \\ -\frac{J}{2} * \sin\theta_i & \leq t_z \leq \frac{J}{2} * \sin\theta_i \end{cases} \quad (4.10)$$

Dans l'espace  $(\vec{r}_x, \vec{r}_y, \vec{r}_z)$ , les domaines jeux  $[J_i]$  formés par les liaisons pion-rainure  $i$  sont limités par 2 plans parallèles de normale extérieure respective  $(-R, -\cos\theta, -\sin\theta)$  et  $(R, \cos\theta, \sin\theta)$  et distants de  $J$ . En considérant les trois pions donc les trois chemins, l'intersection des trois domaines pour  $\theta = 0, 120$  et  $240$  respectivement donne un domaine cubique ( $2*3=6$  faces) (fig. 4.11).

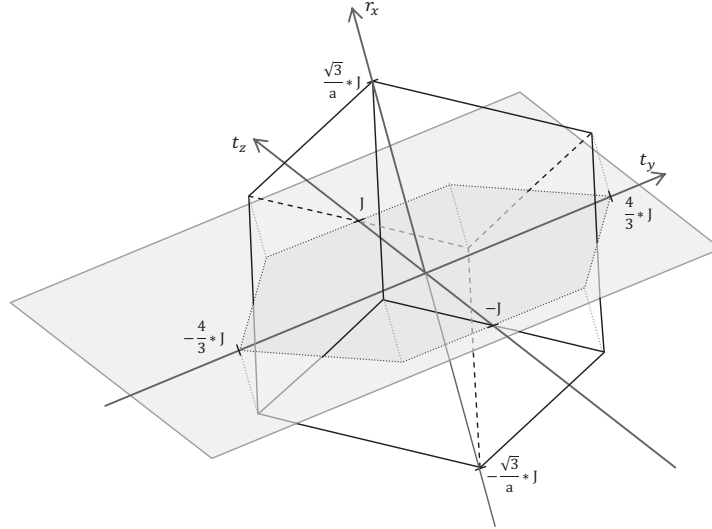


Fig. 4.11 – Intersection des domaines jeux  $[J_i]$  générés par les liaisons pion-rainure  $i$

L'intersection avec le domaine jeux provenant de la liaison appui-plan fixe les dimensions  $(\vec{r}_y; \vec{r}_z; \vec{t}_x)$  à 0. La projection du domaine résultant dans le plan  $(\vec{t}_y, \vec{t}_z)$  est, comme précédemment avec la méthode des *T-maps*<sup>®</sup>, un hexagone inscrit dans un cercle de diamètre  $t_{cf} = \frac{8}{4} * J$ .

Lorsqu'elle peut être appliquée, la modélisation de jeux d'assemblage sous forme de sommes de *Min-kowski* est plus simple à mettre en œuvre. De plus elle implique une propriété de linéarité permettant de retrouver la notion de coefficients d'influences.

La méthode d'intersection des domaines nécessite des opérations d'intersections. Ces opérations sont plus complexes et suppriment la propriété de linéarité nécessaire à la notion de coefficients d'influence. Cependant cette méthode est plus générique et permet de traiter l'ensemble des assemblages tridimensionnels en parallèle, quel que soit leur degré d'hyperstatisme.



## IV.2 Analyse de la position et de l'orientation de la surface terminale

Avec la modélisation par domaines, l'ensemble des positions et orientations atteignables par la surface terminale est modélisé par le domaine jeux résultat obtenu par diverses opérations de somme et d'intersection en fonction des hypothèses d'étude (rôle des jeux).

Nous nous intéressons aux écarts de position et d'orientation relatifs entre les deux surfaces fonctionnelles tolérancées. Deux problématiques sont à considérer :

### ◊ Respect de la condition fonctionnelle

Soit une condition fonctionnelle entre deux surfaces extrêmes. Celle-ci limite, les écarts relatifs entre ces deux surfaces fonctionnelles tolérancées.

La condition fonctionnelle est respectée au pire des cas si et seulement si le domaine jeux résultat est inclus dans le domaine modélisant la condition fonctionnelle. La méthode de calcul de ce domaine jeux résultat dépend du type de condition fonctionnelle spécifiée.

- L'inclusion du domaine jeux résultant  $[J_r]$  dans le domaine condition fonctionnelle  $[C_f]$  permet de s'assurer que, quels que soit les écarts  $\vec{E}_c \in [E_c]$  et la valeur des jeux  $j_c$ , il existe une configuration de jeux  $\vec{J}_c \in [J_c] = j_c * [j_c]$  permettant d'obtenir une position et une orientation relatives des deux surfaces fonctionnelles respectant la condition fonctionnelle (eqn. 4.11).

Pour  $c=1$  au nombre de chemins d'assemblage

$$\begin{aligned} \forall \vec{E}_c \in [E_c] \text{ et } \forall j_c \in [j_{c_{min}}; j_{c_{max}}]; \\ \exists \vec{J}_c \in [J_c] = j_c * [j_c], \quad \text{tel que : } [J_r] \subset [C_f] \end{aligned} \quad (4.11)$$

- L'inclusion du domaine d'imprécision résultant  $[I]$  dans le domaine condition fonctionnelle  $[C_f]$  permet de s'assurer que quels que soient les écarts  $\vec{E}_c \in [E_c]$  et les jeux  $\vec{J}_c \in [J_c]$ , la position et l'orientation relative des deux surfaces fonctionnelles respectent la condition fonctionnelle (eqn. 4.12).

Pour  $c=1$  au nombre de chemins d'assemblage

$$\begin{aligned} \forall \vec{E}_c \in [E_c] \text{ et } \forall \vec{J}_c \in [J_c] \\ [I] \subset [C_f] \end{aligned} \quad (4.12)$$

### ◊ Écarts relatifs entre les deux surfaces terminales

Pour l'analyse statistique, on évalue l'écart de position et d'orientation relatif entre les deux surfaces terminales. L'ensemble des positions atteignables par la surface terminale est modélisé par le domaine jeux résultats. Bien que ce domaine soit obtenu à partir des domaines jeux, il prend également en compte les écarts intrinsèques à l'assemblage. Les notions de jeux et d'écarts sont intimement liées et ne peuvent plus être découplées comme c'était le cas pour les assemblages en série. Il n'est alors plus possible d'obtenir pour chaque tirage de type Monte-Carlo un tenseur écarts résultant.

Afin de s'affranchir des problèmes de couplage entre écarts et jeux, nous faisons l'hypothèse que l'assemblage est en butée dans une direction choisie aléatoirement ou par les conditions de montage données. La direction choisie peut être considérée comme une condition fonctionnelle élémentaire et permettre ainsi de sélectionner un point sur les bords du domaine jeux résultat. Ce point modélise l'écart relatif entre les deux surfaces fonctionnelles.

La direction de sélection est générée comme une variable aléatoire pour chaque tirage de Monte-Carlo. Lors du cycle de vie du produit, certaines directions peuvent être privilégiées (conditions de montage, d'utilisation, ...). La densité de probabilité de la direction générée sera alors adaptée à ces configurations. Sinon, celle-ci sera uniformément répartie dans l'ensemble de l'espace d'étude.

## V Méthode de calcul sur les domaines

Pour chaque type de condition fonctionnelle, nous avons vu comment traduire le problème de tolérancement sous forme d'équation de domaines. il serait désormais intéressant de décrire la manipulation de ces domaines, permettant de se ramener à des équations scalaires, et en particulier pour les opérations de type somme de *Minkowski* et intersection.

Afin de palier aux problèmes de ressources de calcul insuffisantes, nous proposons une méthode de représentation originale des domaines permettant de simplifier les opérations utilisées dans le cadre de l'analyse de tolérancement. Le principe consiste à effectuer les calculs nécessitant de grandes ressources une fois pour toute au début puis d'utiliser ces résultats pour les calculs plus simples effectués à chaque tirage de type Monte-Carlo.

On recense deux grandes opérations sur les domaines pour effectuer l'analyse statistique des tolérances : L'addition (sommées de *Minkowski*) et l'intersection de domaines.

### V.1 Addition des domaines

Soit le domaine  $[D]$  somme de *Minkowski* des domaines convexes  $[D_1]$  et  $[D_2]$ . Le domaine  $[D]$  peut être obtenu en calculant les coordonnées des sommets du domaine  $[D_2]$  lorsque l'origine de celui-ci est placée en chacun des sommets du domaine  $[D_1]$ . Ainsi, le domaine  $[D] = [D_1] \oplus [D_2]$  est le domaine enveloppe du nuage de points précédemment obtenu (fig. 3.6).

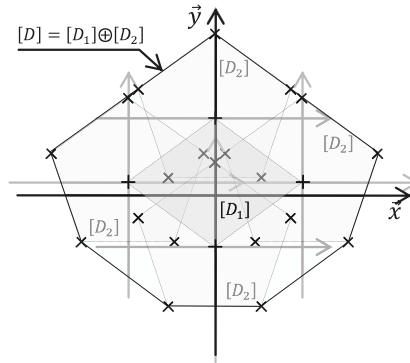


Fig. 4.12 – Somme de *Minkowski* de deux domaines :  $[D] = [D_1] \oplus [D_2]$

Nous avons vu au paragraphe II.2 du chapitre 3 que la complexité de ce type de calcul évoluait de manière exponentielle avec le nombre de domaines à sommer. Une nouvelle méthode de représentation des polytopes convexes a donc été développée dans le but de simplifier cette opération de sommation.

#### V.1.a Liste des hyper-plans frontières

Nous avons vu dans le chapitre (2) que les domaines peuvent être représentés sous forme de polytope convexe. Soit  $n$  la dimension de ce polytope convexe, ses frontières sont définies par des éléments géométrique linéaires appelés hyper-plans frontières de dimension inférieure ou égales à  $n - 1$ . La liste de ses hyper-plans frontière de dimension  $n - 1$  est appelée *H-représentation* et définit entièrement la forme du domaine.

De par la propriété des polytopes convexes, la somme de *Minkowski* de deux polytopes convexes de même dimension  $n$  est un polytope convexe de dimension  $n$ . Sa *H-représentation* est constituée d'hyper-plans de dimension  $n - 1$ . On démontre que cette liste d'hyper-plans est construite par combinaison des éléments géométriques frontières des domaines sommés [Teissandier 11].

Par la suite, nous exprimerons les polytopes convexes sommés dans un espace de même dimension  $n$  que le domaine somme de *Minkowski*. En fonction de cette dimension  $n$ , la liste d'hyper-plan frontières du domaine somme de *Minkowski* est construite de différentes manières. Elle est constituée des hyper-plans frontières de dimension  $n - 1$  des domaines sommés et éventuellement d'autres hyper-plans construits par combinaison des éléments géométriques linéaires frontières, de dimensions inférieures ou égales à  $n - 2$  (tab. 4.3).

Dimension $n$ du polytope convexe somme de <i>Minkowski</i>	Possibilités de combinaisons pour former les hyper-plans frontières de la <i>H-représentation</i>	
	Dimension des hyper-plans frontières de la <i>H-représentation</i>	Combinaisons d'hyper-plans de dimension $\leq n - 2$ formant des hyper-plans de dimension $n - 1$
1	0 (points)	-
2	1 (droites)	-
3	2 (plans)	1 & 1 <sup>1</sup>
4	3 (hyper-plans $\equiv$ volumes)	1 & 2 <sup>2</sup>
5	4 (hyper-plans de dimension 4)	2 & 2 et 1 & 3
6	5 (hyper-plans de dimension 5)	2 & 3 et 1 & 4

Table 4.3 – Obtention des hyper-plans frontières du polytope somme de *Minkowski* de deux polytopes convexes

Il est donc possible d'établir la liste des hyper-plans susceptibles d'appartenir à la *H-représentation* du domaine somme de *Minkowski* de deux polytopes convexes à partir de la seule connaissance de leurs éléments géométriques frontières.

#### ◇ Exemple de calcul dans un espace de dimension 3

Afin d'illustrer notre propos, nous proposons d'étudier la somme de deux polytopes convexes de dimension 3 (fig. 4.13). La *H-représentation* du domaine somme de *Minkowski* est composée d'hyper-plans de dimensions 2 (des plans). Cette liste de plans est composée des plans frontières des deux domaines sommés (plans en bleu et rouge (fig. 4.13(a))) et des plans construits par combinaison d'hyper-plans de dimension 1 (des droites) du premier domaine avec des droites du second (plans en violet (fig. 4.13(b))).

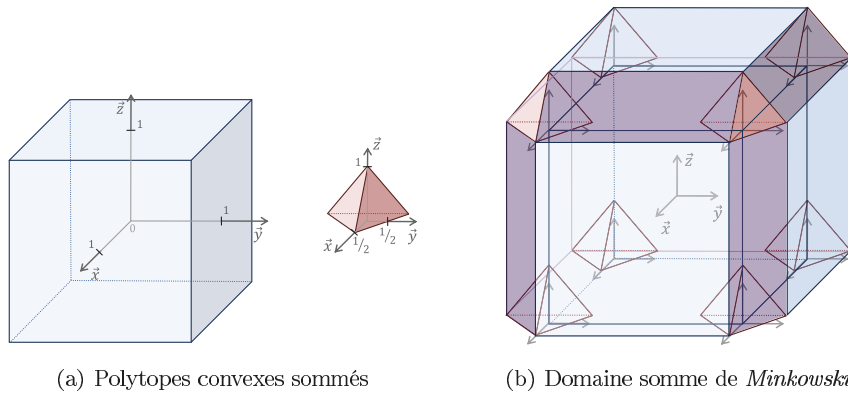


Fig. 4.13 – Exemple de somme de *Minkowski* de deux polytopes convexes

Chaque hyper-plan frontière est défini par sa normale sortante  $\vec{n}_{h_i}$  (le vecteur normal  $\vec{n}_{h_i}$  pointe vers l'extérieur du demi hyper-espace, limité par l'hyper-plan  $H_i$  concerné).

1. une arête qui se déplace sur une autre arête non parallèle génère une face
2. une face qui se déplace sur une arête non parallèle génère un volume 3D "3D-face" du polytope

Dans l'exemple précédent (fig. 4.13), le premier domaine parallélépipédique est défini par 6 hyper-plans frontières de dimension  $n - 1 = 2$  et de normale (eqn. 4.13) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \vec{n}_{h_{11}} \right\}_{b_0} = (1; 0; 0)_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{h_{12}} \right\}_{b_0} = (-1; 0; 0)_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{h_{13}} \right\}_{b_0} = (0; 1; 0)_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{h_{14}} \right\}_{b_0} = (0; -1; 0)_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{h_{15}} \right\}_{b_0} = (0; 0; 1)_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{h_{16}} \right\}_{b_0} = (0; 0; -1)_{b_0} \end{array} \right. \quad (4.13)$$

De même, le second domaine tétraédrique est défini par 4 hyper-plans frontières de dimension  $n - 1 = 2$  et de normale (eqn. 4.14) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \vec{n}_{h_{21}} \right\}_{b_0} = (1; 1; \frac{1}{2})_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{h_{22}} \right\}_{b_0} = (1; -1; \frac{1}{2})_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{h_{23}} \right\}_{b_0} = (-1; 0; \frac{1}{2})_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{h_{24}} \right\}_{b_0} = (0; 0; -1)_{b_0} \end{array} \right. \quad (4.14)$$

La liste des plans susceptibles d'appartenir à la *H-représentation* du domaine somme de *Minkowski* est donc composée de ces  $6 + 4 = 10$  hyper-plans frontières auxquels il faut ajouter tous les hyper-plans construits par combinaison des hyper-plans frontière de dimension 1 du premier polytope avec les hyper-plans frontière de dimension 1 du second polytope (1&1).

Le premier polytope est composé de 3 hyper-plans de dimension 2 (plans) linéairement indépendants. Soit  $C_n^k$  le nombre de combinaisons sans ordre, de  $k$  parmi  $n$ . Il existe  $C_3^2 = 3$  types d'hyper-plan de dimension 1 (arêtes) pour ce polytope. De même pour le second polytope, il est formé de 4 hyper-plans de dimension 2. On en déduit  $C_4^2 = 6$  hyper-plans frontières de dimension 1. Il faut donc ajouter  $C_3^2 * C_4^2 = 18$  hyper-plans de dimension 2 susceptibles d'appartenir à la frontière du polytope somme de *Minkowski*.

Parmi ces 18 hyper-plans, on retrouve les 5 plans représentés en violet sur la figure (fig. 4.13(b)) et de normale (eqn. 4.15) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \left( \vec{n}_{h_{22}} \wedge \vec{n}_{h_{23}} \right) \wedge \left( \vec{n}_{h_{13}} \wedge \vec{n}_{h_{15}} \right) \right\}_{b_0} = (0; -1; 1)_{b_0} \\ \left\{ \left( \vec{n}_{h_{21}} \wedge \vec{n}_{h_{23}} \right) \wedge \left( \vec{n}_{h_{13}} \wedge \vec{n}_{h_{15}} \right) \right\}_{b_0} = (0; 1; 1)_{b_0} \\ \left\{ \left( \vec{n}_{h_{21}} \wedge \vec{n}_{h_{24}} \right) \wedge \left( \vec{n}_{h_{11}} \wedge \vec{n}_{h_{13}} \right) \right\}_{b_0} = (1; 1; 0)_{b_0} \\ \left\{ \left( \vec{n}_{h_{24}} \wedge \vec{n}_{h_{22}} \right) \wedge \left( \vec{n}_{h_{11}} \wedge \vec{n}_{h_{13}} \right) \right\}_{b_0} = (-1; 1; 0)_{b_0} \\ \left\{ \left( \vec{n}_{h_{21}} \wedge \vec{n}_{h_{22}} \right) \wedge \left( \vec{n}_{h_{15}} \wedge \vec{n}_{h_{11}} \right) \right\}_{b_0} = (2; 0; 1)_{b_0} \end{array} \right. \quad (4.15)$$

◊ **De manière générale**, il est possible de déterminer géométriquement les combinaisons d'hyper-plans frontière de dimension inférieure à  $n - 1$  générant des hyper-plans de dimension  $n - 1$  appartenant à la *H-représentation*. Teissandier utilise la notion DualCone [Teissandier 11]. La liste finale d'hyper-plans de dimension  $n - 1$  susceptibles d'appartenir à la *H-représentation* du domaine somme de *Minkowski* est définie en supprimant de la liste complète de vecteurs normaux  $\vec{n}_{h_i}$ , les vecteurs colinéaires. La suppression de ces vecteurs colinéaires permet de s'affranchir des éventuels hyper-plans frontières redondants. Le sens de la normale oriente le demi hyper-espace associé à l'hyper-plan frontière. Afin de s'assurer d'obtenir un polytope convexe (fermé), on ajoute à la liste de vecteurs normaux  $\vec{n}_{h_i}$ , les vecteurs opposés  $-\vec{n}_{h_i}$ .

De par la propriété de commutativité de la somme de *Minkowski*, l'ordre dans lequel sont sommés les polytopes convexes n'a pas d'influence sur la forme finale du domaine somme de *Minkowski*. De plus, nous avons vu que la somme de *Minkowski* de deux polytopes convexes était un polytope convexe. Il est donc possible d'établir la liste des hyper-plans frontières susceptible d'appartenir à la *H-représentation* des domaines sommes de plus de deux polytopes convexes, en reproduisant la méthode décrite ci-dessus.

En particulier, on peut établir la liste des hyper-plans frontières de dimension  $n - 1$  des domaines résultants de différents chemins d'assemblage. Ainsi, pour chaque mécanisme, il est possible d'établir la liste des hyper-plans susceptibles d'appartenir à la *H-représentation* de tout domaine résultant. Cette liste constituée des vecteurs normaux  $\vec{n}_{h_i}$  et de leur opposé sera nommée "*B*" (cf. § V.1.b).

### V.1.b Nouvelle méthode de représentation

Chaque hyper-plan  $H_i$  susceptible d'appartenir à la *H-représentation* du domaine somme de dimension  $n$  est totalement défini par 2 entités indépendantes :

- un vecteur normal  $\vec{n}_{h_i}$
- et un scalaire  $c_i$  fixant sa position le long de cette normale.

$$H_i : c_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot x_j$$

Avec :  $\left| \begin{array}{l} a_{i,j} \text{ les coordonnées du vecteur normal } \vec{n}_{h_i}. \\ x_j \text{ les coordonnées d'un point courant de l'hyper-plan.} \end{array} \right.$  (4.16)

*Remarque :* Le scalaire  $c_i$  correspond au coefficient d'influence du demi hyper-espace associé à l'hyper-plan frontière  $H_i$  sur le domaine considéré (cf. chapitre 3).

#### ◊ La liste *B*

Nous avons vu (cf. § V.1.a) qu'il était possible de rassembler l'ensemble des hyper-plans de normale  $\vec{n}_{h_i}$  susceptibles d'appartenir à la *H-représentation* de tout polytope résultant d'un assemblage quelconque. Une liste "*B*" est construite à partir de cet ensemble de vecteurs normaux  $\vec{n}_{h_i}$ , duquel on a supprimé les vecteurs colinéaires (redondance). La liste finale est obtenue en ajoutant les vecteurs normaux opposés  $-\vec{n}_{h_i}$  afin de s'assurer d'avoir des polytopes convexes.

Tout domaine  $[D]$  généré par opérations sur les polytopes convexes  $[P_1]$  et  $[P_2]$  peut être représenté comme un domaine limité par l'ensemble des hyper-plans  $H_i$  de la liste *B*. La position de ces hyper-plans est paramétrée par le scalaire  $c_i$ . Ainsi, la forme du domaine  $[D]$  est entièrement définie par une matrice colonne de composantes  $c_i$ , associée aux hyper-plans frontière de la liste *B*

#### ◊ Exemple de représentation de polytopes convexes de dimension 2

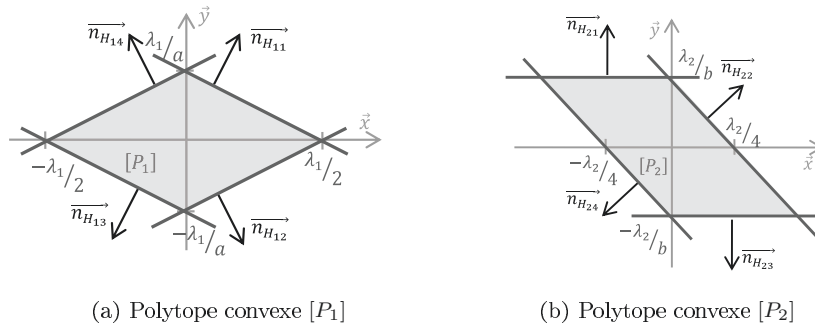


Fig. 4.14 – Deux polytopes convexes définissant une liste de 8 hyper-plans frontières de vecteurs normaux  $\vec{n}_{H_i}$

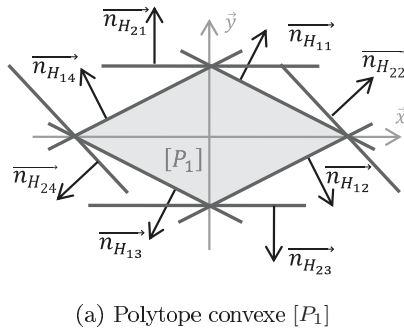
Dans le cas de la sommation des deux polytopes convexes, de paramètres de taille respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  (fig. 4.14), la liste  $B$  est composée de 8 vecteurs normaux  $\vec{n}_{H_i}$  ( $2*4$  vecteurs linéairement indépendants) (eqn. 4.17).

$$B = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -2 & -a \\ 2 & -a \\ -2 & a \\ 0 & b \\ 0 & -b \\ 4 & b \\ -4 & -b \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \left\{ \vec{n}_{H_{11}} \right\}_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{H_{13}} \right\}_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{H_{12}} \right\}_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{H_{14}} \right\}_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{H_{21}} \right\}_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{H_{23}} \right\}_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{H_{22}} \right\}_{b_0} \\ \left\{ \vec{n}_{H_{24}} \right\}_{b_0} \end{matrix} \quad (4.17)$$

◇ **Matrice des coefficients  $c_i$**

Pour chaque polytope, par exemple  $[P_1]$  et pour chaque normale de l'autre polytope ( $[P_2]$ ), on cherche le sommet de  $[P_1]$  qui minimise la distance à l'hyper-plan tout en restant à l'extérieur du demi hyper-espace limité par l'hyper-plan. On obtient donc pour le polytopes  $[P_1]$  une matrice colonne des coefficients d'influence de la liste des hyper-plans de  $B$  sur la polytope  $[P_1]$  (fig. 4.15(a)). On fait de même pour  $[P_2]$  (fig. 4.15(b)).

Ainsi, les polytopes convexes  $[P_1]$  (fig. 4.15(a)) et  $[P_2]$  (fig. 4.15(b)) peuvent être représentés chacun par une matrice colonne à 8 composantes  $c_i$ , associée à la liste  $B$  (respectivement (eqn. 4.18a) et (eqn. 4.2)) :



$$P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 * \frac{b}{a} \\ \lambda_1 * \frac{b}{a} \\ \lambda_1 * 2 \\ \lambda_1 * 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} H_{11} : \lambda_1 = [2 \ a] * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ H_{13} : \dots \\ H_{12} : \dots \\ H_{14} : \dots \\ H_{21} : \dots \\ H_{23} : \dots \\ H_{22} : \dots \\ H_{24} : \dots \end{matrix} \quad (4.18a)$$

$B$

$$P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 * \frac{a}{b} \\ \lambda_2 * \frac{a}{b} \\ \lambda_2 * \left(1 + \frac{a}{b}\right) \\ \lambda_2 * \left(1 + \frac{a}{b}\right) \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} H_{11} : \dots \\ H_{13} : \dots \\ H_{12} : \dots \\ H_{14} : \dots \\ H_{21} : \dots \\ H_{23} : \dots \\ H_{22} : \dots \\ H_{24} : \dots \end{matrix} \quad (4.2)$$

$B$

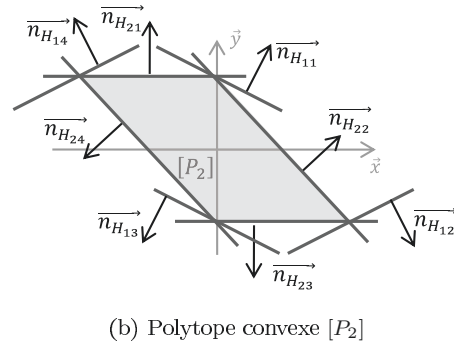


Fig. 4.15 – Nouvelle représentation des polytopes  $[P_1]$  et  $[P_2]$  associée à la liste  $B$  définie précédemment

### V.1.c Sommes de *Minkowski*

Soit  $H_i$  une condition fonctionnelle élémentaire. D'après sa définition (cf. chap. 3 § II.2.a), le coefficient d'influence  $c_i$  du domaine  $[D]$  somme de plusieurs polytopes convexes  $[P_j]$  sur la condition  $H_i$  est la somme des coefficient d'influence  $c_{ij}$  de ces polytopes convexes  $[P_j]$  sur la condition  $H_i$  (eqn. 4.19).

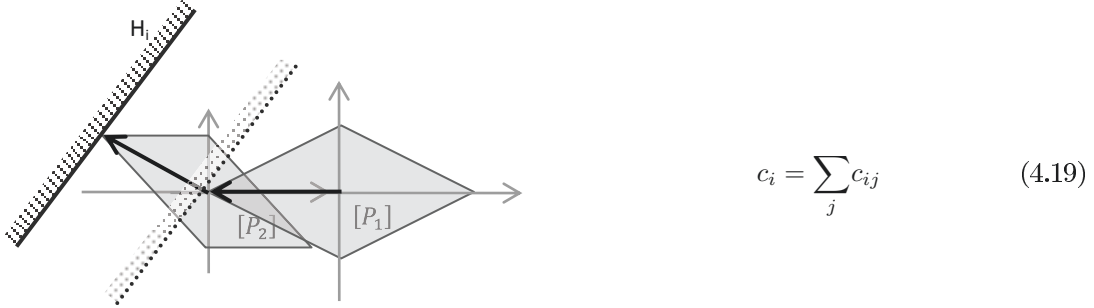


Fig. 4.16 – Illustration du coefficient d'influence  $c_i$  de la somme des polytopes  $[P_1]$  et  $[P_2]$  sur une condition  $H_i$

Ainsi, la matrice colonne  $D$  représentant le domaine  $[D]$  somme de *Minkowski* de plusieurs polytopes convexes  $[P_i]$  s'obtient par une simple addition des matrices colonnes  $P_j$  représentant les polytopes convexes sommés  $[P_j]$  (eqn. 4.20).

$$[D] = \sum_j [P_j] \iff D = \sum_j P_j \quad (4.20)$$

On considère les polytopes convexes de dimension deux pris en exemple précédemment (fig. 4.14). Soit un domaine  $[D]$  représenté par la matrice colonne  $D$  associée à la liste  $B$  somme de *Minkowski* des polytopes convexes  $[P_1]$  et  $[P_2]$  représentés respectivement par les matrices colonnes  $P_1$  (eqn. 4.18a) et  $P_2$  (eqn. 4.2) associées à la liste  $B$ . La matrice colonne  $D$  est égale à la somme des matrices colonnes  $P_1$  et  $P_2$  (eqn. 4.21a) :

$$[P_1] \oplus [P_2] = [D] \iff P_1 + P_2 = D \quad (4.21a)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ b \\ \frac{a}{b} \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} * \lambda_1 + \begin{bmatrix} \frac{a}{b} \\ \frac{a}{b} \\ 1 + \frac{a}{b} \\ 1 + \frac{a}{b} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * \lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{b}{b} \\ \frac{a}{b} \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (4.21b)$$

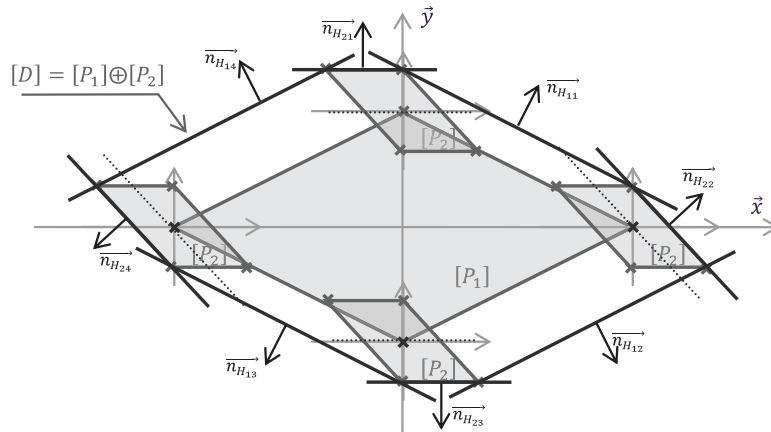


Fig. 4.17 – Illustration de la nouvelle représentation de la somme de deux polytopes convexes  $[P_1]$  et  $[P_2]$

En faisant varier  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  on obtient toute la famille des domaines somme de *Minkowski*. Une fois le paramétrage effectué, la somme de *Minkowski* relativement complexe revient à une simple addition.

## V.2 Intersections de domaines

La seconde opération couramment utilisée dans les problématiques d'analyse de tolérancement de mécanismes avec liaisons en parallèles est l'intersection de domaines.

Soit  $[D]$  le domaine intersection de polytopes convexes  $[P_i]$ . De par la propriété des polytopes convexes, le domaine  $[D]$  est un polytope convexe.

### ◊ Méthode classique d'évaluation du domaine intersection :

Usuellement, le domaine  $[D]$  est calculé par passage des *H-représentations* de l'ensemble des polytopes convexes  $[P_i]$  en *V-représentations*, puis retour à la *H-représentation*. Les étapes de calcul sont les suivantes :

1. Concaténation des hyper-plans frontières de l'ensemble des polytopes convexes  $[P_i]$ .
2. Calcul des points intersections de l'ensemble des hyper-plans frontières des polytopes convexes  $[P_i]$ .
3. Sélection des points appartenant à l'ensemble des polytopes convexes  $[P_i]$  afin d'obtenir la *V-représentation* du domaine  $[D]$ .
4. Transformation de la *V-représentation* en ensemble d'hyper-plans frontières.

Lorsque les hyper-plan frontière ne sont pas connu à l'avance, le passage de la *V-représentation* à la *H-représentation*, est très exigeante en ressource de calcul. De même, le passage inverse (d'un ensemble d'hyper-plan frontières à la *V-représentation*) revient à chercher les points d'intersection de toutes les combinaisons de  $n$  hyper-plans de la *H-représentation* ( $n$  étant la dimension du polytope convexe). Le calcul de ces points d'intersection, est équivalent à une opération d'inversion de matrice plus exigeante en ressource de calcul.

Grâce à la représentation originale des domaines intersectés, la méthode de calcul du domaine intersection est simplifiée.

### ◊ Évaluation du domaine intersection avec la nouvelle représentation :

Avec la nouvelle représentation des domaines, chaque polytope convexe  $[P_i]$  intersecté est représenté par une matrice colonne  $P_i$  dont les composantes correspondent aux seconds membres des équations d'hyper-plans de la liste d'hyper-plans frontières associée. Il suffit donc de prendre pour chaque hyper-plan frontière de la liste associée à la nouvelle représentation, celui dont le second membre est le plus faible (dans l'ensemble des polytopes intersectés) pour obtenir une définition du polytope convexe intersection. On obtient une matrice colonne  $P_{min}$  des coefficients minimaux.

Il est toutefois probable que cette définition contienne des hyper-plans frontières surabondants ne passant pas par un sommet du domaine (fig. 4.18).



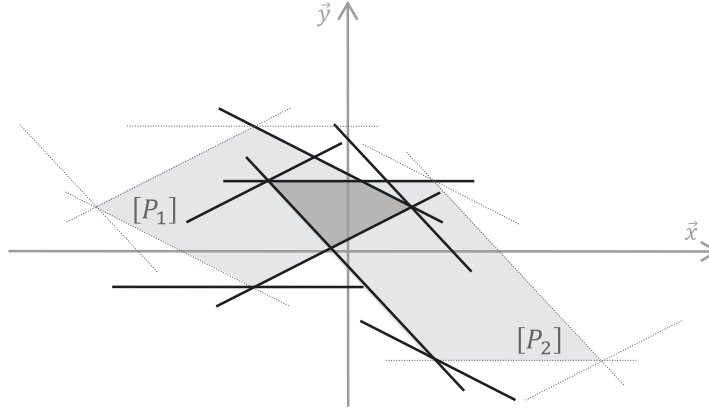


Fig. 4.18 – Exemple d'intersection de deux polytopes convexes  $[P_1]$  et  $[P_2]$  définis par leur nouvelle représentation

Afin d'obtenir une définition du domaine intersection conforme à la définition de la nouvelle représentation, permettant d'être intégrée dans les calculs suivants, il convient d'identifier et de ré-évaluer le coefficient des hyper-plans frontières ne passant par un sommet.

#### ▷ Passage à la *V-représentation*

Grâce à notre nouvelle méthode de représentation des domaines, l'ensemble des hyper-plans frontières est connu à l'avance. Les calculs d'intersection peuvent donc être effectués une fois pour toute avant la simulation statistique. Les points d'intersection sont exprimés en fonction des coefficients  $c_i$  de chaque hyper-plan frontière de la liste  $B$ . Ainsi, on s'affranchit du calcul d'inversion de matrices que l'on a fait une fois pour toute au début et il devient possible d'évaluer les domaines intersections pour chaque tirage de type Monte-Carlo.

Par une simple opération "*minimum*", on a identifié les hyper-plans susceptibles d'appartenir à la frontière du domaine intersection. On peut donc calculer les points intersections en fonction des coefficients  $c_i$  de ces hyper-plans. Un point peut être considéré comme un domaine à un seul sommet et donc représenté de la même manière qu'un polytope convexe. Dans ces conditions, le point appartient à l'ensemble des polytopes convexes intersectés si et seulement si chacune de ses composantes associée à la liste  $B$  est inférieure à la composante correspondante de la matrice colonne  $P_{min}$  des seconds membres minimaux.

La *V-représentation* du domaine intersection est constituée uniquement des sommets calculés, appartenant à l'ensemble des polytopes convexes intersectés.

#### ▷ Évaluation de la nouvelle représentation du domaine intersection

A partir de la *V-représentation* déterminée précédemment, on obtient aisément la nouvelle représentation du domaine intersection, par un calcul des coefficients d'influence du domaine sur l'ensemble des hyper-plans frontières de la liste  $B$ .

## VI Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre une méthode d'analyse au pire des cas et statistique, du tolérancement de mécanismes avec liaisons en parallèle. Avec cette topologie d'assemblage, les petits déplacements relatifs des surfaces terminales, autorisés par les jeux s'obtiennent en fonction du rôle des jeux, par intersection des différents domaines écarts et jeux résultant des chemins d'assemblage. Cette opération d'intersection n'est pas une opération linéaire c'est pourquoi elle ne permet plus de traduire le problème de tolérancement sous forme de relations linéaires.

La méthode d'analyse statistique consiste donc à simuler l'assemblage des lots de pièces avec défauts, générés par tirage de type Monte-Carlo et d'évaluer le taux de respect de la condition fonctionnelle en fonction des répartitions de tolérances. Les variables aléatoires sont :

- Les écarts : coordonnées des petits déplacements autorisés par la zone de tolérance affectée à chaque surface de liaison.
- Les jeux : fonction des dimensions géométriques définissant le paramètre de taille du domaine jeux.

Jusqu'à présent les ressources de calcul nécessaires aux opérations sur les domaines modélisant le montage ne permettaient pas d'effectuer la simulation statistique de l'assemblage de mécanismes avec liaison en parallèle. Une nouvelle méthode de représentation des domaines, utilisée dans le cas de la modélisation du tolérancement, a été mise au point dans le but de simplifier ces opérations. Avec cette représentation originale adaptée aux problématiques de tolérancement, il est désormais possible d'effectuer ces opérations pour chaque tirage de type Monte-Carlo. On peut donc générer des pièces avec défauts géométriques aléatoires limités par le tolérancement, puis simuler leur assemblage pour vérifier le respect de la condition fonctionnelle.





– Gaffophone de Gaston™ by Franquin

### Objectifs

Dans ce chapitre, nous allons aborder la résolution générique des problématiques de tolérancement appliquées aux mécanismes tridimensionnels constitués de liaisons en série et de liaisons en parallèle. Nous avons vu que la plupart des assemblages pouvait être décrits comme une combinaison de ces deux grandes familles de mécanismes. L'utilisation des méthodes mises au point pour traiter ces deux cas de figure associées à la nouvelle représentation des domaines permet de développer une méthode de traitement systématique du tolérancement de la plupart des assemblages tridimensionnels. Nous décrirons cette méthode en nous appuyant sur l'exemple de l'étude de l'assemblage par double piétage.

## I Analyse du tolérancement des mécanismes hybrides

### I.1 Topologie

Nous appelons mécanisme hybride, un système reliant une condition fonctionnelle par un graphe d'assemblage réductible [Giordano 09] constitué de liaisons en série et de liaisons en parallèle (fig. 5.2).

Ce type de mécanismes représente la grande majorité des produits manufacturés actuels.

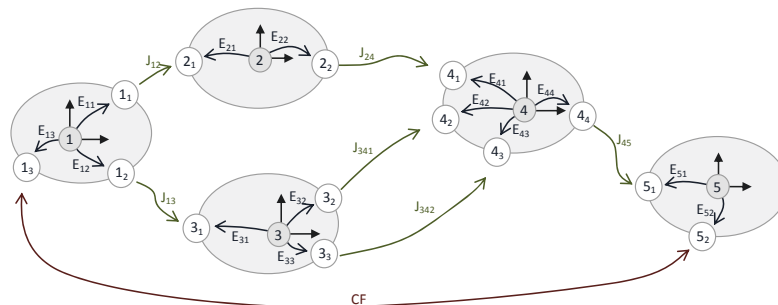


Fig. 5.2 – Exemple de graphe d'assemblage de mécanisme hybride

Un graphe est dit réductible lorsqu'il peut être ramené à un graphe élémentaire par réduction successive des liaisons en série et parallèle.

- La réduction série consiste à transformer un assemblage successif de solides (avec jeux et écarts) en un seul jeu et un seul écart.
- De la même manière, la réduction parallèle consiste à transformer un assemblage de solides avec liaisons en parallèle en un seul jeu ou écart.

On appelle graphe élémentaire (fig. 5.3) un graphe d'assemblage constitué de 3 sommets reliés par 3 arcs : une condition fonctionnelle, un écart et un jeu. Lors des réductions successives, le graphe d'assemblage est totalement remodelé. Les arcs représentent des jeux et écarts équivalents et rendent obsolète la notion de solide. Lors des calculs, les graphes seront donc épurés pour ne conserver que les nœuds et arcs utiles.

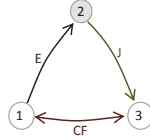


Fig. 5.3 – Exemple de graphe d'assemblage élémentaire

L'étude du tolérancement des mécanismes hybrides nécessite donc l'utilisation combinée des méthodes décrites dans les chapitres précédents (empilage simple (cf. chapitre 3) et liaisons en parallèle (cf. chapitre 4)).

## I.2 Méthode de résolution

La résolution de ce type de mécanismes passe par la réduction successive des assemblages en série et en parallèle composant l'assemblage global, jusqu'à obtenir un graphe d'assemblage élémentaire dont les deux nœuds extrêmes sont reliés par la condition fonctionnelle  $C_f$ . Cette réduction s'opère en plusieurs étapes :

1. Dans un premier temps, chaque chemin d'assemblage de type empilage simple est réduit en un domaine jeux et un domaine écarts obtenus par somme de *Minkowski* des domaines jeux et écarts composant l'empilage simple.

La topologie hybride prise en exemple précédemment (fig. 5.2), se réduit de la manière suivante (fig. 5.4) avec les domaines équivalents (eqn. 5.1) :

Avec :

$$\begin{aligned} \text{Le domaine jeux équivalent : } & [J_{14}] = [J_{12}] \oplus [J_{24}] \\ \text{Le domaine écarts équivalent : } & [E_{14}] = [E_{11}] \oplus [E_{21}] \oplus [E_{22}] \oplus [E_{41}] \end{aligned} \quad (5.1)$$

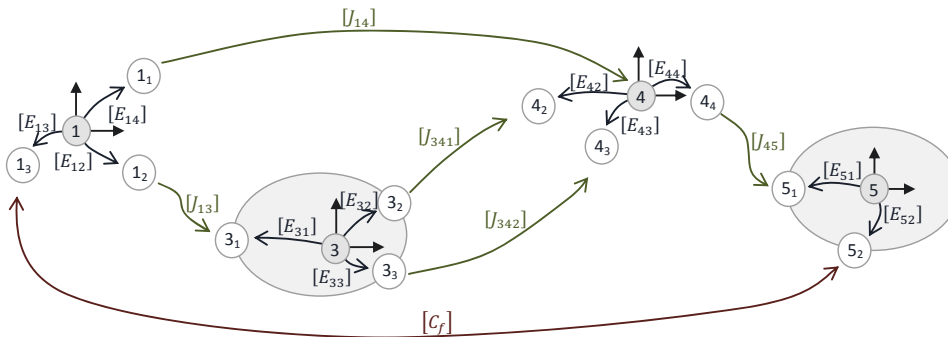


Fig. 5.4 – Réduction des assemblages de type empilage simple composant l'exemple de topologie hybride

2. Ensuite, il s'agit d'identifier les maillons d'assemblage en parallèle. On appelle maillon d'assemblage en parallèle deux pièces reliées par plusieurs chemins d'assemblage ne comportant que des liaisons en série. Chacun de ces maillons se réduit en un domaine jeux ou écarts équivalent, suivant le rôle des jeux dans l'assemblage.

- Dans le cas où la condition fonctionnelle doit être respectée pour au moins une configuration de jeu ( $\exists$ ), les jeux sont favorables au respect de la condition fonctionnelle (condition de type montabilité).

Si les jeux dans le maillon d'assemblage en parallèle sont laissés libres après le montage, le graphe d'assemblage en parallèle est réduit en un domaine jeux équivalent modélisant l'ensemble des positions et orientations toujours atteignables par la surface terminale du maillon d'assemblage, quels que soient les écarts géométriques dans ce maillon (domaine jeux résultant  $[J_r]$ ).

- Si les jeux dans le maillon d'assemblage en parallèle sont fixés après le montage (vis, ....) ou, dans le cas où la condition fonctionnelle doit être respectée pour toutes les configurations de jeux ( $\forall$ ), les jeux sont défavorables au respect de la condition fonctionnelle (condition de type précision).

Suivant le type d'étude, le domaine équivalent s'obtient de différentes manières :

- ▷ *Au pire des cas* : Le maillon d'assemblage en parallèle est réduit en un domaine écart équivalent. Ce domaine représente l'ensemble des positions et orientations dans lesquelles la surface terminale du maillon d'assemblage peut se retrouver par combinaison des écarts et des jeux à l'intérieur du maillon (domaine d'imprécision résultant  $[I]$ ).
- ▷ *Pour l'analyse statistique* : Les écarts sont générés aléatoirement à l'intérieur de leur domaine écarts. Dans l'espace des domaines, les écarts sont donc réduits en un point (équivalent à un domaine ne comportant qu'un seul sommet). Le domaine écarts équivalent doit donc être de même nature.

L'ensemble des positions et orientations atteignables par la surface terminale est défini par le domaine intersection de l'ensemble des domaines jeux décalés, de chaque chemin d'assemblage en parallèle. Afin d'obtenir un domaine écarts ponctuel, on sélectionne un point sur les bords de ce domaine intersection. Ce point peut être choisi suivant une direction privilégiée ou généré de manière aléatoire suivant les conditions de montage et d'utilisation.

Dans l'exemple précédent (fig. 5.4), on identifie un maillon d'assemblage en parallèle reliant les pièces 3 et 4. Dans une problématique de type jeux favorables ( $\exists$ ), cette topologie se réduit de la manière suivante (fig. 5.5) avec le domaine jeux équivalent (eqn. 5.2) :

$$[J_{34}] = \bigcap \left\{ \vec{E}_{32} + \vec{E}_{42} + [J_{341}] \mid \vec{E}_{33} + \vec{E}_{43} + [J_{342}] \right\} \quad \forall \vec{E}_i \in [E_i] \text{ avec } i = \{22; 42; 33; 43\} \quad (5.2)$$

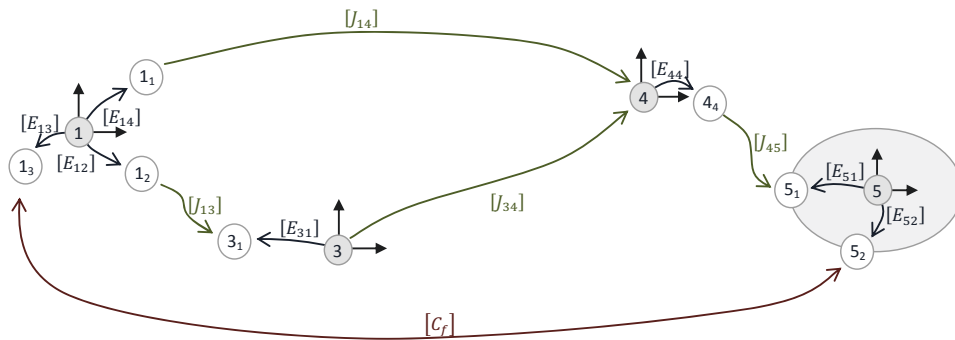


Fig. 5.5 – Réduction des maillons d'assemblages en parallèle composant l'exemple de topologie hybride

3. On répète ainsi les étapes 1 et 2 jusqu'à obtenir une topologie de mécanisme de type empilage simple, fermée par la condition fonctionnelle  $C_f$ .

Dans l'exemple précédent (fig. 5.5), il suffit de réduire le chemin d'assemblage en série reliant les pièces 1, 3 et 4 (étape 1) (eqn. 5.3 fig. 5.6) puis de calculer le domaine jeux équivalent du maillon d'assemblage en parallèle entre les pièces 1 et 4 (étape 2) (eqn. 5.4 fig. 5.7).

Avec :

$$\begin{aligned} \text{Le jeux équivalent : } & [J_{15}] = [J_{13}] \oplus [J_{34}] \\ \text{Le domaine écarts équivalent : } & [E_{15}] = [E_{12}] \oplus [E_{31}] \end{aligned} \quad (5.3)$$

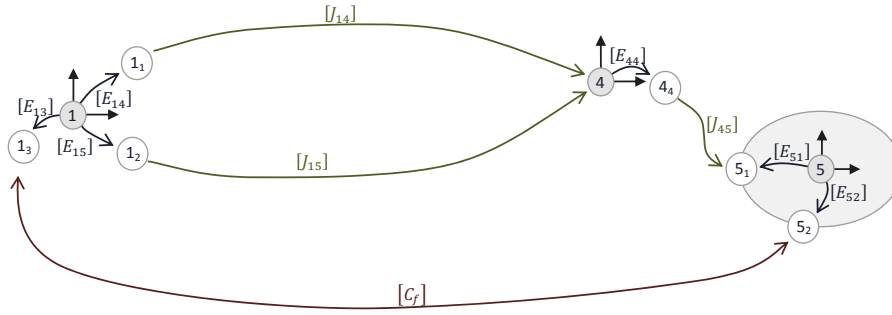


Fig. 5.6 – Réduction du chemin d'assemblage en série reliant les pièces 1, 3 et 4 de l'assemblage hybride

$$[J_{16}] = \bigcap \left\{ \vec{E}_{14} + \vec{0} + [J_{14}] \mid \vec{E}_{15} + \vec{0} + [J_{15}] \right\} \quad \forall \vec{E}_i \in [E_i] \text{ avec } i = \{14; 15\} \quad (5.4)$$

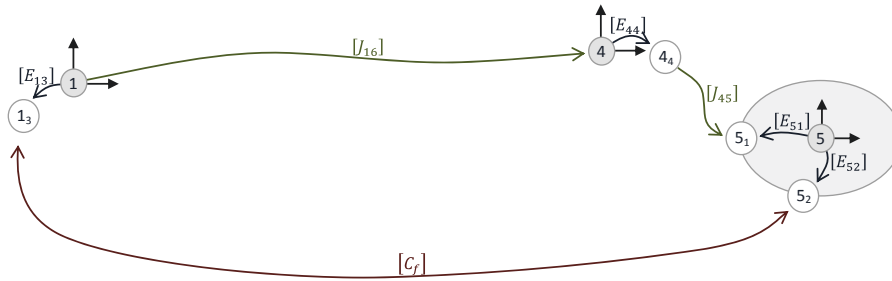


Fig. 5.7 – Réduction du maillon d'assemblage en parallèle de l'assemblage hybride

Une dernière réduction série nous permet d'obtenir un graphe d'assemblage élémentaire (eqn. 5.5 fig. 5.8).

Avec :

$$\begin{aligned} \text{Le jeux équivalent : } & [J] = [J_{16}] \oplus [J_{45}] \\ \text{Le domaine écarts équivalent : } & [E] = [E_{13}] \oplus [E_{44}] \oplus [E_{51}] \oplus [E_{52}] \end{aligned} \quad (5.5)$$

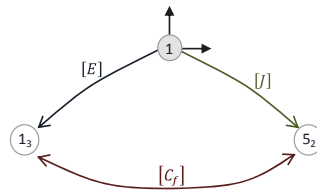


Fig. 5.8 – Réduction finale de l'assemblage hybride

4. Enfin, la résolution finale revient à étudier le respect d'une condition fonctionnelle d'un empilage simple avec jeux et écarts.

*Au pire des cas*, la condition fonctionnelle est respectée si et seulement si le domaine somme de *Minkowski* des domaines de l'assemblage élémentaire, est inclus dans le domaine condition fonctionnelle. En fonction du rôle des jeux dans le mécanisme, les domaines jeux sont additionnés aux domaines écarts (jeux défavorables, condition de type précision " $\forall$ ") ou à la condition fonctionnelle (jeux favorables, condition de type montabilité " $\exists$ ").

*L'étude statistique*, est menée par une méthode de Monte Carlo. Un lot de pièces avec jeux et écarts est généré aléatoirement. Pour chacun de ces tirages aléatoires, on réduit le graphe d'assemblage pour simuler le montage et tester le respect de la condition fonctionnelle (fig. 5.9).

Le montage est possible si pour chaque réduction d'assemblage en parallèle, le domaine jeux ou écarts équivalent, calculé par une opération d'intersection, existe.

La condition fonctionnelle, est respectée si le domaine écarts équivalents respecte les conditions d'inclusion dans le domaine condition fonctionnelle. Ces conditions d'inclusion sont dictées par le rôle des jeux dans l'assemblage.

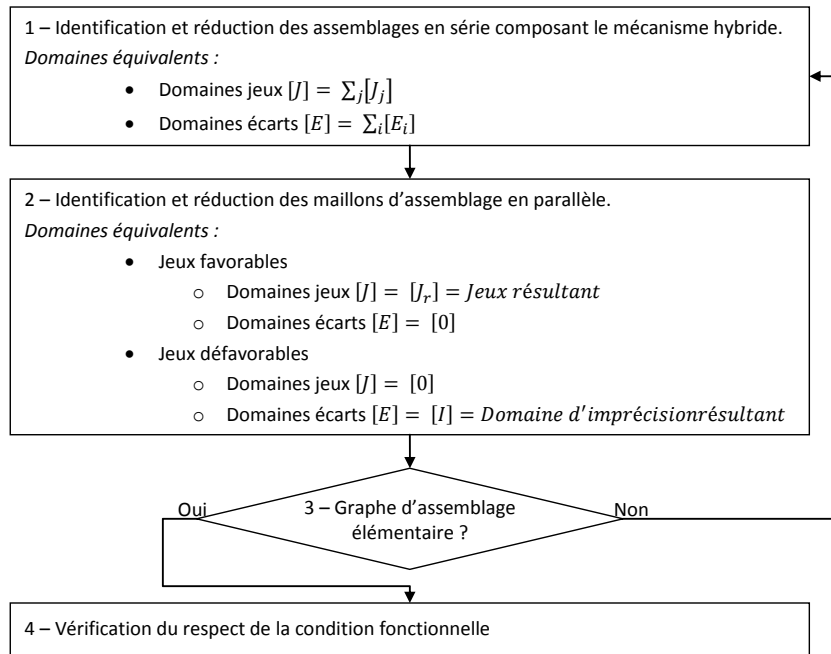


Fig. 5.9 – Algorithme de réduction du graphe d'assemblage des mécanismes hybrides



## II Application de la méthode

### II.1 Assemblage par double piétage

Afin de valider notre nouvelle méthode d'analyse de tolérancement statistique nous l'avons programmée sous Matlab® et appliquée à un exemple d'assemblage bien connu du laboratoire SYMME, l'assemblage par double piétage (fig. 5.10). Une condition fonctionnelle de localisation est appliquée sur les surfaces externes des deux pièces terminales de l'assemblage. Ce mécanisme modélise une problématique d'assemblage courante dans de nombreuses machines (carter support de pompes à vide, de réducteurs, de moteurs, de pompes et moteurs hydrauliques divers).

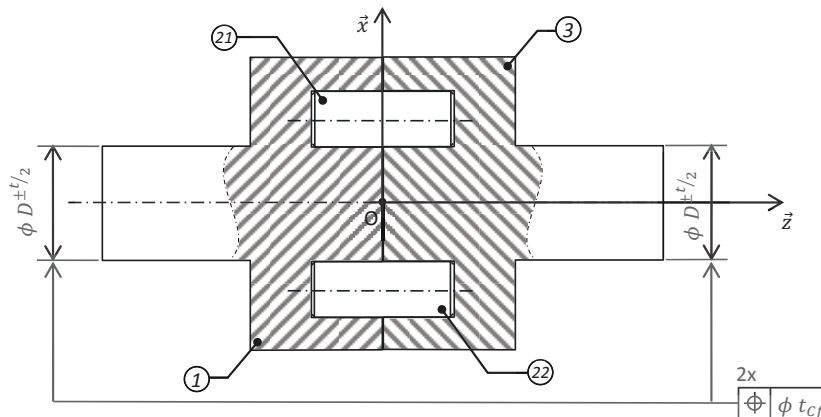


Fig. 5.10 – Assemblage par double piétage

L'assemblage par double piétage est réalisé par un appui-plan prépondérant à contact maintenu par vis ou boulons d'assemblage et un centrage par deux pions. Sur les flasques 1 et 3, la surface supposée plane sera donc prise en référence primaire *A*. Les deux surfaces supposées cylindriques du piétage sont donc mises en position l'une par rapport à l'autre et orientées perpendiculairement par rapport à la référence primaire plane *A*. Ces surfaces pourront définir une référence secondaire *B* pour tolérer la surface fonctionnelle. La figure ci-après (fig. 5.11) définit un tolérancement simple en adéquation avec les exigences et besoins fonctionnels du mécanisme.

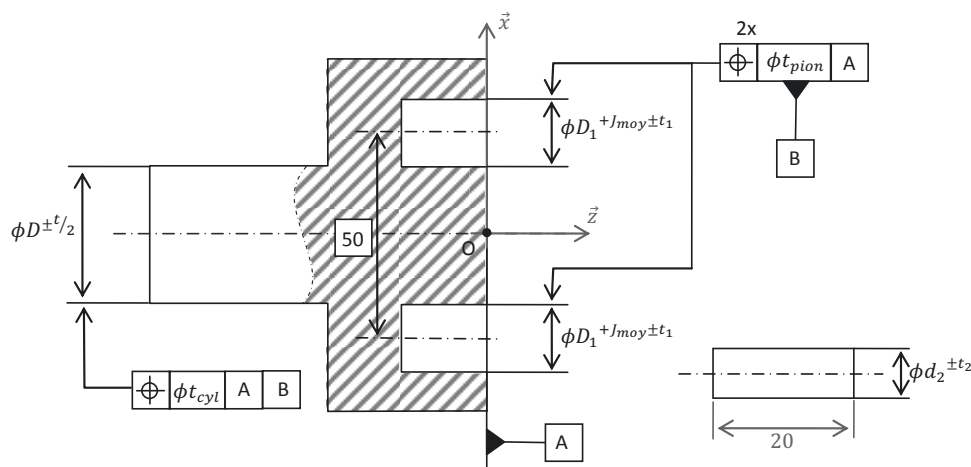


Fig. 5.11 – Tolérancement des pièces de l'assemblage par double piétage

## II.2 Modélisation des données d'entrées

### II.2.a Topologie

Ce mécanisme peut se modéliser sous la forme d'un graphe d'assemblage de la manière suivante (fig. 5.12) :

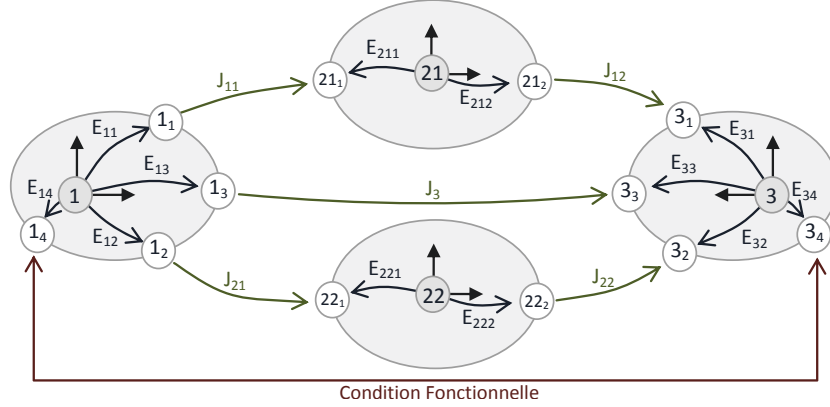


Fig. 5.12 – Graphe d'assemblage de l'assemblage par double piétage

Informatiquement, celui-ci est mis sous la forme d'un tableau dont les entrées en lignes et en colonnes sont l'ensemble des surfaces de liaison et à chaque intersection, s'il existe, le jeu les reliant (tab. 5.1) :

	11	12	13	14	211	212	221	222	31	32	33	34
11	—	—	—	—	11	—	—	—	—	—	—	—
12	—	—	—	—	—	—	21	—	—	—	—	—
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$C_f$
211	11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
212	—	—	—	—	—	—	—	—	12	—	—	—
221	—	21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
222	—	—	—	—	—	—	—	—	—	22	—	—
31	—	—	—	—	—	12	—	—	—	—	—	—
32	—	—	—	—	—	—	—	22	—	—	—	—
33	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
34	—	—	—	$C_f$	—	—	—	—	—	—	—	—

Table 5.1 – Tableau décrivant la structure de l'assemblage par double piétage

A partir de ces informations, l'algorithme identifie automatiquement les maillons d'assemblage en parallèle et les chemins d'assemblage en série permettant de réduire le système à un empilage simple avec jeux.

Ici, notre mécanisme est composé d'un maillon d'assemblage en parallèle formé de 3 chemins d'assemblage reliant les pièces 1 et 3. Une fois ce maillon d'assemblage réduit, on retrouve une topologie de type empilage simple avec jeux, composé des écarts  $[E_{14}]$  et  $[E_{34}]$ , de la liaisons équivalente et de la condition fonctionnelle  $C_f$

## II.2.b Défauts et mobilités internes

Les domaines jeux et écarts d'une surface de liaison sont générés automatiquement à partir des coordonnées de ses points extrêmes  $P_i$ , de leur normale au contact  $\vec{n}_i$  et de la limitation du déplacement autorisé le long de cette normale  $\delta_i$ .

Dans notre exemple, l'étude au pire des cas de notre mécanisme peut être réduite à une étude dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ .

À chaque surface tolérancée est associé un domaine écarts et à chaque liaison avec jeu est affecté un domaine jeux. On construit ces domaines en limitant le déplacement des points caractéristiques associé à chaque entité géométrique. Ces entités sont défini par des tableaux indiquant pour chacun de leurs points caractéristiques, le déplacement  $\delta$  ainsi que la normale à la surface  $\vec{n}$  (tab. 5.2 & 5.3) :

$\delta$	Point			Normale		
	X	Y	Z	X	Y	Z
0,5	25	0	-10	1	0	0
-0,5	25	0	-10	1	0	0
0,5	25	0	0	1	0	0
-0,5	25	0	0	1	0	0

Table 5.2 – Tableau recensant l'ensemble des informations de la surface tolérancée 11 pour la construction du domaine écarts  $E_{11}$

$\delta$	Point			Normale		
	X	Y	Z	X	Y	Z
0,5	25	0	-10	1	0	0
-0,5	25	0	-10	1	0	0
0,5	25	0	0	1	0	0
-0,5	25	0	0	1	0	0

Table 5.3 – Tableau recensant l'ensemble des informations de la liaison 11 pour la construction du domaine jeux  $J_{11}$

Grâce à ces informations, on calcule la *H-représentation* de l'ensemble des domaines jeux et écarts composant l'assemblage. On peut alors construire la liste  $B$  d'hyper-plans frontières de la nouvelle représentation des domaines vue au chapitre (4) précédent. On en déduit la nouvelle représentation des domaines jeux et écarts, définie par l'ensemble des hyper-plans (en vert) de la liste  $B$  (fig. 5.13).

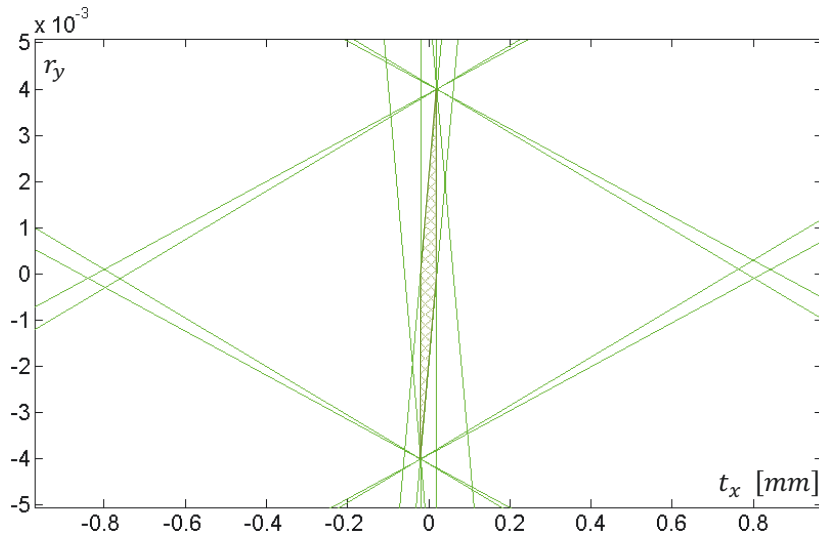


Fig. 5.13 – Nouvelle représentation dans le plan  $(\vec{t}_x, \vec{r}_y)$  du domaine jeux  $[J_{11}]$

On calcule également les coordonnées des points d'intersection des hyper-plans de la précédente liste. Les coordonnées de ces points sont paramétrées par le coefficient de position des hyper-plans le long de leur normale afin de faciliter leur calcul par la suite.

### II.3 Tirages aléatoires

A ce stade, le problème dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$  est entièrement modélisé et les calculs complexes (inversion de matrice) ont été effectués en amont afin d'alléger les calculs par la suite.

En toute rigueur, l'analyse statistique doit prendre en compte l'ensemble des directions d'études  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . Cependant, pour des raisons de clarté d'explications, nous limitons l'illustration des calculs aux comportements dans le plan. La méthode de calcul est identique en 3 dimensions.

L'analyse statistique du tolérancement consiste, ici, à simuler les dispersions sur les différentes dimensions lors de la fabrication. Pour ce faire, on définit une densité de probabilité et une loi de dépendance statistique pour chacune des variables aléatoires suivantes :

- Les composantes du torseur écarts  $\vec{E}_i$  de chaque surface de liaison, telles que  $\vec{E}_i$  appartienne au domaine  $[E_i]$  associé.
- Les dimensions fixant la taille  $J_i$  de chaque domaine jeux  $[J_i]$ .
- Les directions permettant, le cas échéant, de choisir un point sur les bords.

Ces variables aléatoires sont ensuite générées suivant une méthode de type Monte-Carlo. Dans notre exemple, avec des lois de distribution uniforme des variables aléatoires à l'intérieur de leur zone de tolérance, on obtient des tirages de la forme (fig. 5.14) :

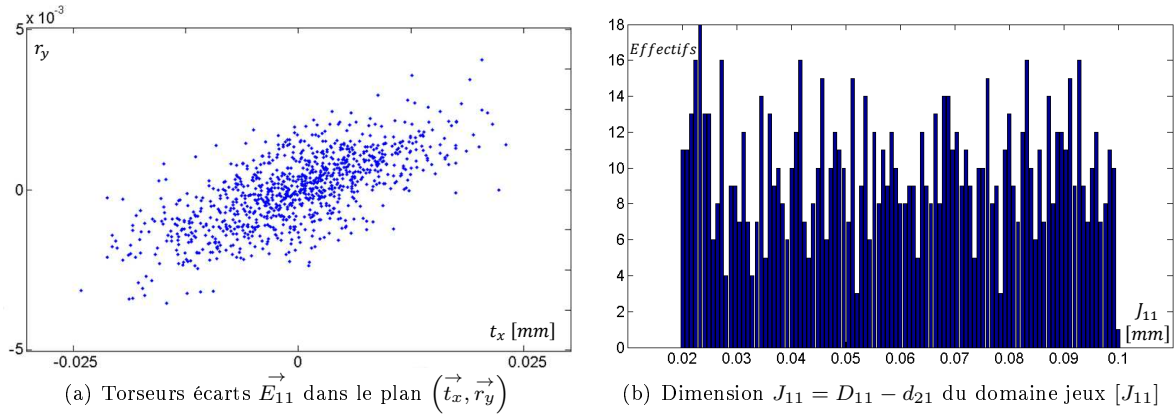


Fig. 5.14 – Génération des variables aléatoires

Pour chaque tirage aléatoire ;

- L'écart est défini sous forme d'un domaine à un seul sommet à l'aide de la nouvelle méthode de représentation.
- La taille des domaines jeux, paramètre leur nouvelle représentation.

### II.4 Calculs

Pour chaque tirage, on évalue la montabilité des différents maillons d'assemblage en parallèle et le respect de la condition fonctionnelle finale. Si toutes ces conditions sont remplies, alors le montage est considéré comme bon, sinon il est rebuté. Cette simulation est rendue possible grâce à notre nouvelle représentation des domaines qui allège considérablement les calculs de simulation de montage pour chaque tirage car les sommes de *Minkowski* et opérations d'intersection sont calculées une seule fois, pour tous les tirages, au début.

### II.4.a Algorithme général

L'algorithme de simulation statistique est le suivant :

Pour chaque tirage

Pour chaque maillon d'assemblage en parallèle

Pour chaque chemin d'assemblage "c"

1. Calcul de l'écart d'empilage  $\vec{E}$  (somme des écarts  $\vec{E}_i$  du chemin d'assemblage "c")
2. Calcul du domaine jeux d'empilage (somme de *Minkowski* des domaine jeux du chemin d'assemblage "c")
3. Décalage du domaine jeux d'empilage par l'écart d'empilage  $\vec{E}$

Fin Pour

1. Calcul du domaine intersection de l'ensemble des domaines jeux décalés résultant du maillon d'assemblage en parallèle.

2. *SI* : Jeux défavorables ( $\forall$ )

→ Domaine intersection  $\equiv$  Écart

⇒ Domaine équivalent = Point sur les bords du domaine intersection

*SINON* : Si jeux favorables ( $\exists$ )

→ Domaine intersection = Jeux équivalent

*FIN SI*

Fin Pour

Test de respect de la condition fonctionnelle  $C_f$  par le mécanisme réduit à une topologie de type empilage simple avec jeu.

Fin Pour

### II.4.b Résultats

#### ◇ Domaine intersection

Pour notre assemblage par double piétage, le domaine intersection du maillon d'assemblage en parallèle est obtenu en faisant l'intersection de 3 domaines. Il s'agit des domaines jeux d'empilage décalé, des deux chemins d'assemblage des pions et du domaine jeux de l'appui plan qui est nul suivant la direction  $\vec{r}_y$  et infini suivant  $\vec{t}_x$  (fig. 5.15).

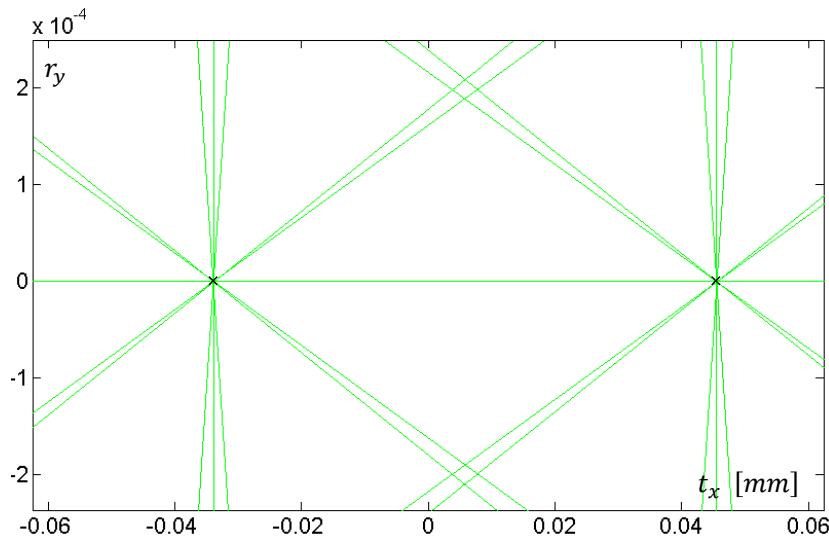


Fig. 5.15 – Nouvelle représentation du domaine intersection du maillon d'assemblage en parallèle

### ◇ Domaine équivalent

Le domaine équivalent au maillon d'assemblage en parallèle, dépend de la nature des jeux à l'intérieur de ce maillon d'assemblage.

▷ **Si les jeux sont défavorables ( $\forall$ )** : le domaine intersection est équivalent à un domaine écart. On choisit donc un point sur les bords afin d'obtenir un torseur écarts, représentatif des défauts géométriques et jeux, à l'intérieur du maillon d'assemblage en parallèle. Il n'existe pas, dans notre cas de montage, de direction privilégiée. Le point sur les bords est donc choisi suivant une direction aléatoire uniformément répartie dans l'espace  $(\vec{t}_x, \vec{r}_y)$  du domaine (vecteur uniformément réparti sur un disque).

Dans l'espace  $(\vec{t}_x, \vec{r}_y)$ , le domaine intersection est un segment suivant l'axe  $\vec{t}_x$  limité par 2 sommets. Le point représentatif est donc l'un de ces deux sommets (fig. 5.16)

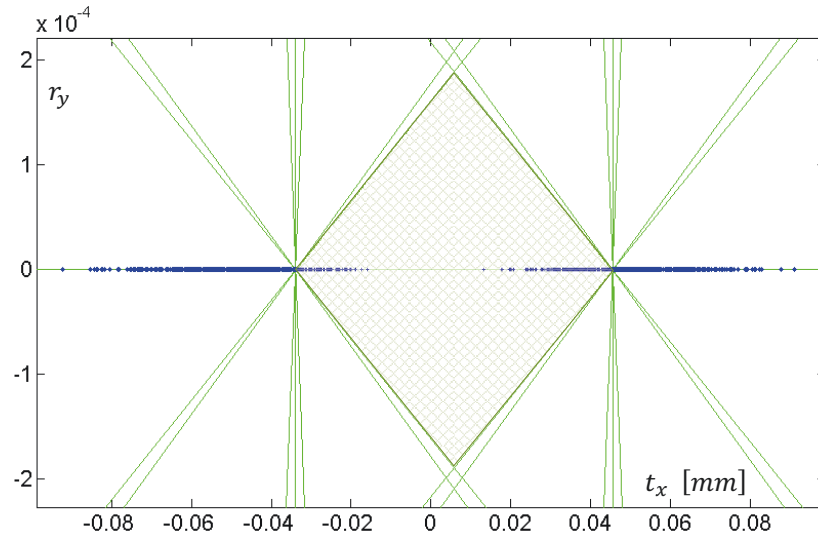


Fig. 5.16 – Domaine intersection d'un tirage et ensemble des points sur les bords du maillon d'assemblage en parallèle

▷ **Si les jeux sont favorables ( $\exists$ )** : le domaine intersection est équivalent à un domaine jeux. Ce domaine jeux représente l'ensemble des positions toujours atteignables par la surface terminale, quels que soient les écarts à l'intérieur du maillon d'assemblage en parallèle.

### ◇ Taux de conformité

Un montage est considéré conforme lorsque tous les maillons d'assemblage en parallèle sont montables (domaine intersection non nul) et que la condition fonctionnelle est respectée selon sa spécification géométrique et le rôle de jeux (inclusion du domaine écarts dans le domaine condition fonctionnelle) (fig. 5.17).

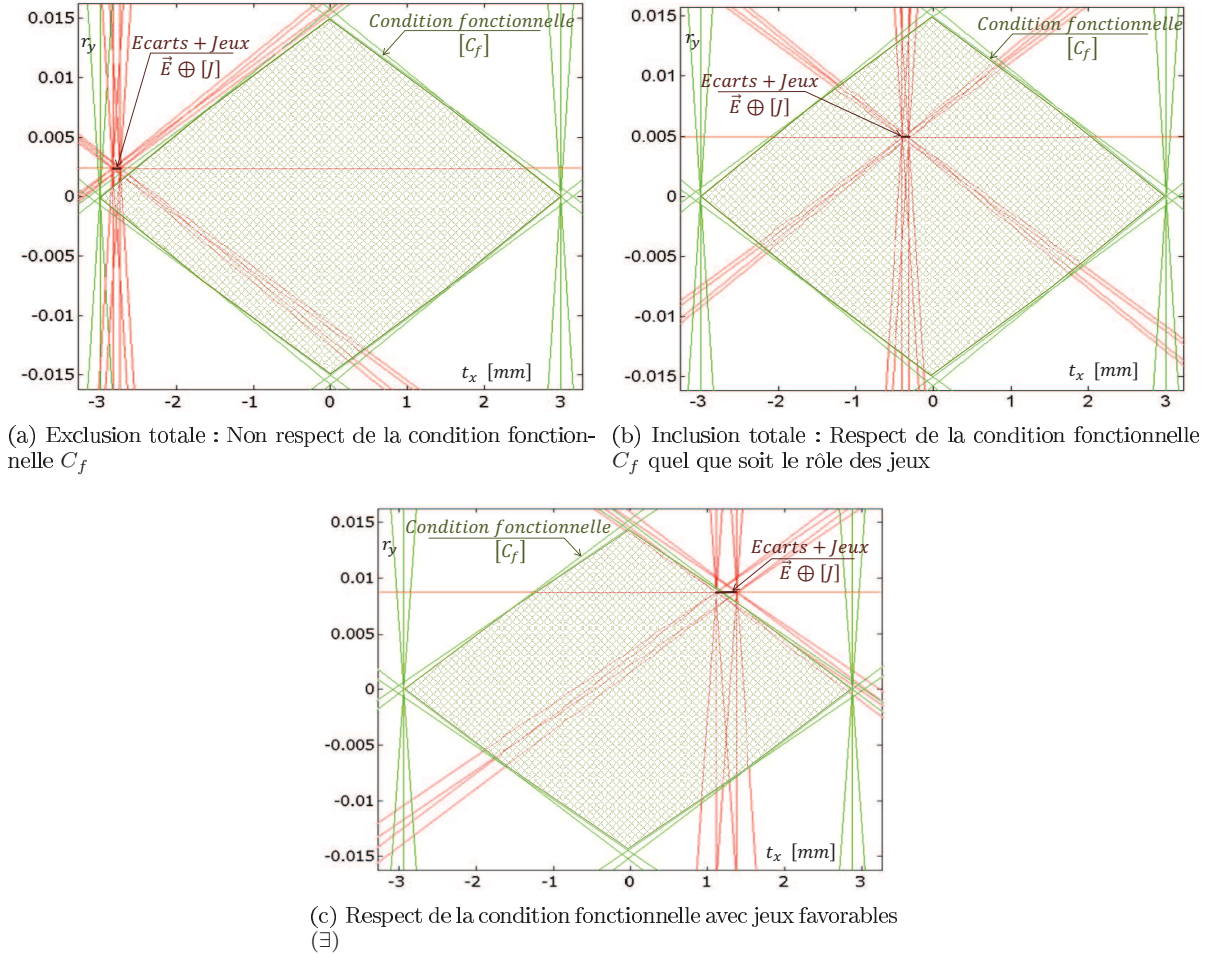


Fig. 5.17 – Condition de respect de la condition fonctionnelle  $C_f$

### II.4.c Analyse statistique

Pour faire l'analyse statistique, on choisit de s'appuyer sur une répartition de tolérance prédéfinie et de ne faire varier que la valeur de la tolérance fonctionnelle  $t_{cf}$  (fig. 5.10). Cela nous permet de déterminer, pour une répartition de tolérance fixée, la valeur optimale de  $t_{cf}$  vis-à-vis d'un taux de rebuts défini.

Ainsi, une simple règle de proportionnalité permet de calculer le tolérancement global du mécanisme afin d'obtenir la tolérance fonctionnelle et le taux de rebuts souhaité.

Afin de définir la répartition de tolérances, on étudie le taux de montabilité des différents maillons du mécanisme. Dans notre cas, nous avons choisi une répartition de tolérances permettant d'obtenir une équirépartition des taux de rebuts imputés à chaque maillon.

Des simulations préalables permettent de définir une répartition de tolérances ( $t_{pion} = 0,05$  &  $t_{cyl} = 0,1$ ) donnant un taux de mécanismes rebuts dû pour moitié à la non-montabilité de l'assemblage par double piétage et pour l'autre moitié, au non respect de la condition fonctionnelle de coaxialité.

La méthode de simulation statistique implique d'effectuer un nombre de tirages significatif. Le nombre de tirages est d'autant plus grand que l'on souhaite simuler un taux de rebuts faible. Il existe des relations reliant le résultat souhaité, au nombre de tirages nécessaires [Germain 07]. Habituellement on prend un facteur 10. Pour 1ppm attendu il faut au moins  $10 * 10^6$  tirages. On peut vérifier que ce nombre de tirage est suffisant en reproduisant la simulation et en contrôlant la convergence des résultats.

Dans le cas où la convergence confirme la cohérence des résultats, on peut mettre à profit l'ensemble des simulations effectuées. En effet, les mesures étant indépendantes, on peut calculer l'espérance mathématique  $E$  et la variance  $V$  des variables fonctionnelles calculées  $X$ , en fonction de leur espérance mathématique  $E_i(X)$  (eqn. 5.6a) et de leur variance  $V_i(X)$  (eqn. 5.6b) obtenues pour chaque mesure  $i$  :

$$E(X) = E(E_i(X)) \quad (5.6a)$$

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^N n_i * V_i(X)}{\sum_{i=1}^N n_i} \quad \text{Avec : } \begin{cases} N : \text{le nombre de mesures} \\ n_i : \text{le nombre de tirages de la mesure } i \end{cases} \quad (5.6b)$$

La simulation numérique nous donne les résultats suivants (tab. 5.4) :

$t_{cf}$	Nombre de mécanismes rebutés sur les 1000 tirages					Moyenne
	simulation n°1	simulation n°2	simulation n°3	simulation n°4	simulation n°5	
0,010	831	836	831	816	827	828,2
0,025	404	426	404	411	425	414
0,050	35	38	27	46	41	37,4
0,075	1	2	2	2	0	1,4
0,100	1	0	0	0	0	0,2

Table 5.4 – Nombre de mécanismes rebutés en fonction de la valeur de la tolérance fonctionnelle  $t_{cf}$

La répartition du défaut d'alignement (point sur les bords du domaine jeux résultant de l'assemblage) obtenu par simulation numérique est illustrée ci-dessous (fig. 5.18) :

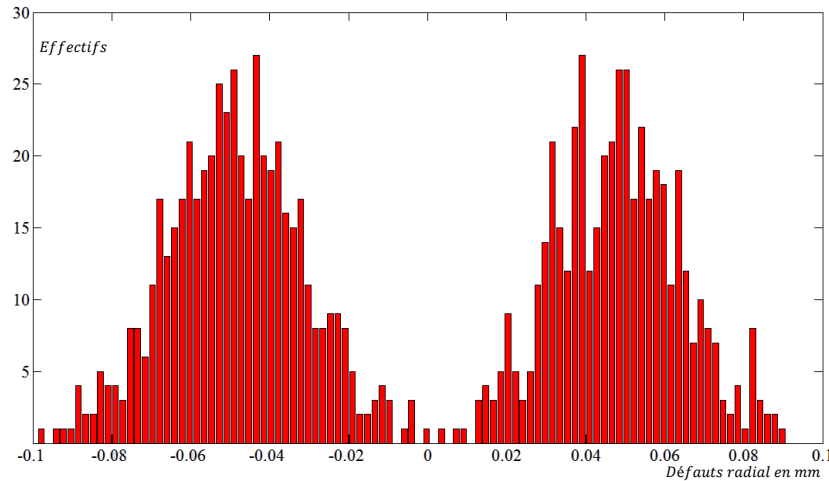


Fig. 5.18 – Défauts d'alignement radial des axes associés aux surfaces fonctionnelles

La répartition du défaut d'alignement se rapproche de deux distribution normale centrée sur les positions extrêmes du domaine jeux résultant. Ce résultat est cohérent par rapport aux hypothèses du problème de tolérancement et corrobore les taux de rebuts obtenus.



La valeur de la tolérance fonctionnelle  $t_{cf}$ , égale à  $0.075mm$ , semble donner un taux de rebuts satisfaisant ( $< 2 ppm$ ). Dans le cas où nous souhaitons une condition fonctionnelle de coaxialité de  $0.3mm$ , nous obtenons le tolérancement suivant (eqn. 5.7) :

$$\begin{cases} t_{pion} = 0,2mm \\ t_{cyl} = 0,4mm \end{cases} \quad (5.7)$$

### III Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu l'application de notre méthode d'analyse du tolérancement sur un mécanisme tridimensionnel spécifique. Ce type d'assemblage représente le type de problématiques rencontrées dans la conception de nombreuses machines. Par exemple, certaines pompes à vide comportent des rotors montés sur des roulements logés dans des flasques. Les flasques sont assemblés sur le stator par piétage. L'assemblage par double piétage (hyper-statique) doit être possible et, le cas échéant, les logements des roulements ne doivent pas présenter un défaut de coaxialité supérieur à une certaine limite.

Cette topologie de mécanismes est bien connue du laboratoire. De nombreuses analyses de tolérancement ont déjà été effectuées sur ce type d'assemblage avec différentes techniques de calcul. Les résultats obtenus avec notre nouvelle méthode de calcul sont en adéquation avec ceux déjà connus. La qualité de la simulation statistique ainsi réalisée est donc validée pour cet assemblage et par extension à la grande famille d'assemblages tridimensionnels pour lesquels la méthode est généralisable.

En effet, notre méthode est totalement générique et peut s'appliquer à tous les mécanismes tridimensionnels pouvant être décrits comme la composition d'assemblages en parallèle et en série. Cette topologie représente la grande majorité des systèmes manufacturés.

Pour chacun de ces systèmes, l'analyse des tolérances est automatisée et permet d'optimiser leur valeur pour un taux de rebuts et une condition fonctionnelle fixés. Seules les architectures de type "*pont de Wheastone*" (fig. 5.19) où l'on peut observer des intersections entre les liaisons ne peuvent pas encore être traitées. Une méthode de calcul spécifique devra être développée afin de pouvoir réduire ce type de structure d'assemblage.

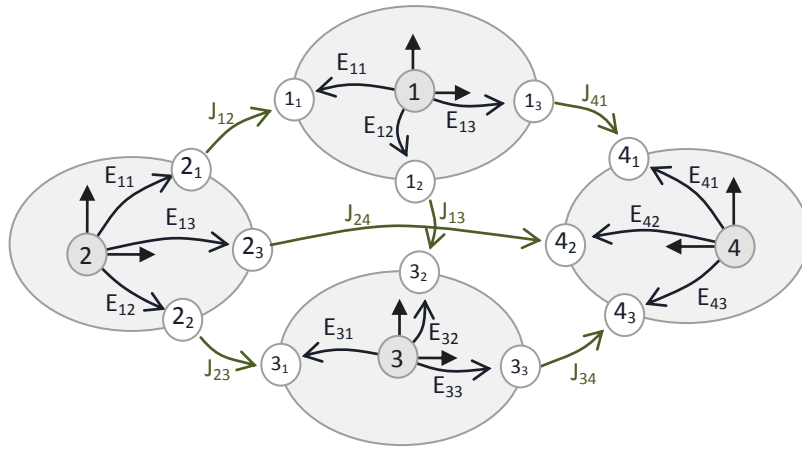


Fig. 5.19 – Architecture de type "*pont de Wheastone*"

## Conclusion et perspectives



– Gaston<sup>TM</sup> by Franquin

Le tolérancement fonctionnel est une étape primordiale dans le cycle de vie d'un produit manufacturé. Une majeure partie des coûts de sa fabrication sont fixés lors de cette phase de conception.

Malgré l'importance de cette étape et les nombreux travaux dans le domaine, il n'existe pas, à notre connaissance de méthode systématique et complète de synthèse de tolérances tridimensionnelles. La démarche de synthèse de tolérances consiste, à partir d'une géométrie et d'exigences fonctionnelles fixées à définir le tolérancement qualitatif et quantitatif global du mécanisme au pire des cas ou par rapport à des données statistiques. L'analyse du tolérancement, quant à elle, est la démarche inverse. Elle consiste à vérifier le respect des exigences géométriques fonctionnelles au pire des cas ou en statistique, à partir d'un tolérancement fixé. Cette dernière méthode peut représenter un palliatif à la synthèse de tolérances (lorsque celle-ci n'est pas possible) pour optimiser le tolérancement.

Les travaux exposés dans ce mémoire ont principalement consisté à optimiser l'outil "*domaines*" de modélisation des tolérances utilisé au laboratoire **SYMME** et à développer de nouvelles méthodes de calcul à partir de ce modèle. En effet, s'intéresser uniquement aux méthodes de calcul, nous a paru rapidement insuffisant. Afin de s'ouvrir de nouvelles possibilités, il a fallu optimiser simultanément le modèle et les algorithmes. Ainsi, chacun est adapté aux problématiques spécifiques du tolérancement.

Nos méthodes de calcul se basent sur une modélisation des exigences géométriques fonctionnelles, par un tolérancement par zone. Les petits déplacements des surfaces tolérancées sont limités à l'intérieur de leur zone de tolérance. L'étendue des petits déplacements autorisés est définie par un système d'inéquations appelé "domaine écarts". De la même manière, pour les jeux, la limitation des petits déplacements

à l'intérieur d'une liaison, avec les hypothèses de solides rigides et d'impénétrabilité de la matière forme un système d'inéquations appelé "domaine jeux". L'ensemble des méthodes de résolution des problématiques de tolérancement consiste à manipuler ces outils domaines et à vérifier l'existence ou l'inclusion des domaines résultats dans un domaine "condition fonctionnelle" pour vérifier le respect de l'exigence fonctionnelle. En fonction du rôle des jeux dans l'assemblage ( $\forall$  ou  $\exists$ ), on définit les conditions d'inclusion (partielle ou totale) des domaines, assurant le respect de l'exigence fonctionnelle. Les conditions d'assemblage qui apparaissent dans la plupart des cas de liaisons en parallèle constituent des conditions fonctionnelles implicites.

Deux grandes familles d'assemblages ont été identifiées :

- Les assemblages en série avec ou sans jeux.
- Les assemblages avec liaisons en parallèle.

Une méthode de résolution spécifique a été développée pour chacune de ces familles de mécanismes. Dans la mesure où la majorité des systèmes mécaniques peuvent être décrits comme une composition de ces deux familles d'assemblages, leur résolution globale est effectuée par traitement local des assemblages en série et en parallèle.

Dans le cas des empilages simples avec ou sans jeu, le concept de coefficient d'influence nous permet d'effectuer la synthèse et l'analyse de tolérances. Jusqu'à présent, les synthèses de tolérancement qualitatif et quantitatif étaient traités séparément. Or, nous avons vu que les deux problématiques sont intimement liées. L'optimisation totale du tolérancement nécessite d'être effectuée de manière qualitative et quantitative simultanément.

La méthode des domaines permet d'associer à chaque liaison et chaque surface de contact un coefficient d'influence indépendamment du tolérancement quantitatif. On obtient ainsi un ensemble de relations linéaires reliant les tolérances dimensionnelles, géométriques et fonctionnelles. Le traitement de ces relations permet :

- d'optimiser la géométrie par minimisation des coefficients d'influence,
- de définir le système de spécification permettant d'obtenir les intervalles de tolérance les plus larges (tolérancement qualitatif). En prenant en référence les surfaces à fort coefficient d'influence, leurs écarts ne sont plus directement influents et aucune tolérance ne leur est affectée,
- de définir la répartition optimale des tolérances permettant le respect au pire des cas de la condition fonctionnelle, par rapport à une fonction coût préalablement définie.

Dans le cas d'un assemblages présentant des liaisons en parallèles, les opérations sur les domaines ne sont plus linéaires (intersection). Il n'est donc plus possible d'obtenir de relations linéaires nécessaires au traitement simultané du tolérancement qualitatif et quantitatif. Des règles métier et l'étude du rang du système de référence permettent de construire de manière systématique un tolérancement qualitatif en accord avec les exigences et besoins fonctionnels du produit manufacturé.

Toutefois, dans certains cas, l'ensemble des liaisons en parallèle peuvent former une liaison sans hyperstatisme. Dans ce cas particulier, l'assemblage peut être traité de la même manière que les assemblages en série avec des opérations de sommes de *Minkowski* [Singh 09]. Ces opérations permettent d'obtenir des relations linéaires par morceaux et de retrouver le concept de coefficient d'influence pour optimiser le tolérancement.

De manière générale, la liaison globale présente des degrés d'hyper-statisme. Le tolérancement ne peut plus être traduit par des relations linéaires, que nous utilisons pour faire la synthèse de tolérances. On propose donc de faire l'analyse du tolérancement.

Au pire des cas, on va contrôler pour chaque tolérancement la montabilité et le respect des exigences fonctionnelles de l'ensemble des assemblages par des conditions sur les domaines résultats (existence, inclusion, ...).

Pour l'étude statistique, on fixe une répartition de tolérances et on cherche la valeur de la tolérance fonctionnelle permettant un taux de rebuts en accord avec le cahier des charges. A partir de cette valeur une transformation proportionnelle de l'ensemble des valeurs des tolérances permet de se ramener à la tolérance fonctionnelle et au taux de rebuts. Pour chaque simulation statistique, on génère des variables

aléatoires :

- d'écarts : pour chaque surface tolérancée, on définit un torseur écart aléatoire appartenant au domaine écart paramétré par la valeur de la tolérance.
- de jeux : pour chaque liaison, on génère un scalaire paramétrant la dimension du domaine jeu

Pour chaque tirage on manipule les torseurs écarts et les domaines jeux afin de vérifier le respect ou non des exigences fonctionnelles.

Jusqu'à présent, la complexité des opérations sur les domaines ne permettait pas de simuler le montage d'un nombre significatif de tirages aléatoires. C'est pourquoi, une nouvelle méthode de représentation de domaines, adaptée à ce type de problématique a été mise au point. Grâce à cette nouvelle représentation des domaines, les calculs nécessitant de grandes ressources peuvent être effectués une fois pour toutes avant la génération aléatoire des lots de pièces. Les résultats paramétrés en fonction des variables aléatoires sont donc ensuite plus rapides à obtenir pour chaque simulation d'assemblage de lot de pièces.

Les résultats obtenus sur un assemblage générique, calculé par ailleurs par d'autres méthodes spécifiques sont encourageants. Leur comparaison avec des résultats antérieurs permet de valider la méthode d'analyse de tolérancement. Cette nouvelle méthode est applicable à la grande majorité des mécanismes tridimensionnels (tous les systèmes décomposables en assemblage en série et en parallèle). Cependant, la méthode de calcul a été expérimentée avec le logiciel MatLab. Elle est aujourd'hui entièrement codée sous ce format et est encore loin d'être optimisée. Il est maintenant nécessaire de poursuivre les travaux, en vue de développer une maquette numérique indépendante et associée à un modèleur C.A.O. permettant d'être déployée dans les bureaux d'études.

Dans cette optique, quelques axes de progrès sont à envisager :

- La diminution du temps de calcul par notamment :
  - ▷ l'optimisation de la programmation, qui jusqu'à présent n'a été développée que dans un but expérimental.
  - ▷ l'intégration d'outils tels que le DualCone [Teissandier 11] pour la génération de la nouvelle représentation.
- L'intégration ou la possibilité de communication du module d'analyse de tolérancement avec un modèleur C.A.O. afin de récupérer les données géométriques nécessaires au calcul de manière automatique pour chaque type d'assemblage.

D'autre part, l'analyse se limite au comportement d'assemblages de pièces rigides sans défaut de forme. Le modèle peut être enrichi :

- en prenant en compte les déformations élastiques dans les liaisons lorsqu'elles sont modélisables [Samper 03],
- en intégrant des domaines écarts modélisant le défaut de forme [Adragna 10].

Avec ces nouveaux outils de modélisation, il est envisageable de chercher la loi de comportement multi-physique des assemblages tridimensionnels [Walter 12]. En effet, si au lieu de variables générées aléatoirement, chaque tirage était constitué des sommets des modèles domaines (variations extrêmes), l'influence de chaque paramètre variable sur le respect des exigences fonctionnelles pourrait être évalué par une méthode de type plan d'expériences.



## Abstract in English



## Tolerancing : General aspects and bibliography

### I Objectives

The goal of this first chapter is to show a global view of significant works about analysis and synthesis of tolerancing. We begin by recalled the aim and general concept of standardized tolerancing. Then, without being exhaustive, we describe, in two steps, the major model of tolerancing and the proposed steps done during this last years. In first part, we speak about the methods of mathematical description of the geometry with deviation. In second part, we present the resolution methods, associated or not with the previous models. Finally, we identify the main software of aided tolerancing.

### II Tolerancing

#### II.1 Why ?

The industrial design is a necessary mean of communication between all trades that occur throughout the life cycle of a manufactured product. Especially, the tolerancing is an essential part of it. It comes from the design step to the manufacturing, trough all step of intermediates and finals inspections.

The component parts of mechanical assembly are made by humans and therefore the geometry is not perfect. The tolerancing should define the kind and limits of acceptable defects. The definition must be unambiguously and understood by all players in manufacturing cycle. It is the fundamental tool to control the geometric quality of products. It's the basis of the written contract between the various stakeholder.

#### II.2 Modeling of the geometry and standardization

The goal of the standardization of the tolerancing language is to provide a unambiguous known and recognized mean of communication for all. This need is essential to be consistent with the current production methods. This language follows the manufacturing processes which are more and more sophisticated and the needs which are more and more requidemanding. It's why, some updates or new standards are regularly added.



During work on the tolerancing, major evolutions make appear 3 main concepts. In chronological order :

- **The dimensional tolerancing** : Local dimension notions and the envelop requirement.
  - ▷ ISO 8015 : technical drawing - Fundamental tolerancing principle [?].
- **tolerancing zones** : All points of the tolerated features must be included in a space called "tolerance zone" and positioned by one or a group of datum features.
  - ▷ NF EN ISO 5459 : 2004 Geometrical product specifications (GPS) - Geometrical tolerancing - Datums and datum systems [NF-EN-ISO-5459 04]
  - ▷ NF EN ISO 1101 : 2006 Geometrical product specifications (GPS) - Geometrical tolerancing - Tolerances of form, orientation, location and run-out [NF-EN-ISO-1101 06]
- **Virtual states** : The tolerated surfaces must respect a control "fit - does not fit" with a virtual caliber.
  - ▷ NF EN ISO 2692 : 2007 Geometrical product specifications (GPS) - Geometrical tolerancing - Maximum material requirement (MMR), least material requirement (LMR) and reciprocity requirement (RPR) [NF-EN-ISO-2692 07]

Across Atlantic, all ASME standards about tolerancing are available in the booklet Y14.5-2009 [ASME-Y14.5 09].

These standardizations are regularly subject to changes or proposition of changes [Ballu 93] [Socoliuc 10].

For example, to notify in which clearance configurations the tolerancing of the product must be respected, Jean-Yves Dantan adds the quantifier [Dantan 05]. He defines two kinds of quantifier, the universal quantifier " $\forall$ " and the existential quantifier " $\exists$ ". He identifies if the geometric specification must be respected for all clearance configurations " $\forall$ " or just for at least one configuration " $\exists$ ". Without being formalized by quantifier, an equivalent notion is currently used in other works [Chavanne 11a] with the words "favorable clearance" when the functional requirement must be respected for at least one clearance configuration (" $\exists$ ") or "unfavorable clearance" when the functional requirement must be respected for all (" $\forall$ ") clearance configurations. Subsequently, we will use these two designations. [Mansuy 11].

The optimization of this communication tool also involves the training of the man who use. It's why many learning activities in reading and writing standardized tolerancing are regularly done [Dufailly 07]. In the same time, some computer tools suggest to aid designers in their choices of geometric specifications of the product in regard to its functional requirements.

### III Aided tolerancing tools

#### III.1 Tolerancing process

The goal of the tolerancing is to control the geometric variations of the product along the numerical data chain (design, production, control and assembly) to ensure its functionality during its life cycle. To do this, each functional surface is specified with a tolerance interval set. The more restrictives tolerances are, the more manufacturing cost, expensive is. But too wide tolerances makes decrease the product quality (functionality, reliability,...). We have to specify in good balance (tolerance intervals as higher as possible with the desired quality) to optimize the costs.

After the functional analysis, all functional requirements of the product are formalized. The first step consists in translating these needs in geometric conditions on the different functional surfaces of the mechanism. Subsequently, these conditions are called "functional conditions".

Serge Samper, breaks these functional conditions down in two types. He begins by checking that the assembly of the system is possible (condition which is named "existence of the problem"), then he checks the respect of the functionality of the product (accuracy condition) [Samper 07]. Indeed, the problem of accuracy exists only if the assembly of the system is possible.

Subsequently, the functional tolerancing will be studied trough these two kinds of functional requirements : accuracy and assembly feasibility.

By Salomons point of view, the functional tolerancing is based on three major problems [Salomons 96b, Salomons 96a] :

- **The specification** : Graphical model of geometric requirement (use of a complete and unambiguous language between all trades)
- **The tolerance synthesis** : Qualitative and quantitative tolerance allocation process for the respect of functional requirements.
- **Tolerance analysis** : Calculation of the sensitivity of the choice of tolerancing specification on the functional requirement.

We can identify three steps for the resolution of the tolerancing problems. The first consists in the modeling, as mathematical objects, the tolerances and geometry of the parts with or without defects. Thus, we obtain geometric deviation, clearance and functional requirement models. The second consists to take into account the assembly, to write the relations between variables of clearance, deviation variables and functional requirement. These relations are called "tolerancing equations". The last consists in translating the functional requirement into equalities and inequalities system with the help of previous relations. The resolution of these systems can be done by two ways : either by a worst case method, or by a statistical point of view. The worst case method takes into account the inequalities between geometric deviation components and tolerance value. In statistical, the probability density and correlation between random variables of geometric deviation are suggested known, to deduce the statistical data of the functional requirement variables.

## III.2 Modeling of the tolerated geometry

### III.2.a Tolerancing models

Some models have been developed to model the tolerated geometry :

- The tolerancing by variational class [Requicha 77, Requicha 83, Srinivasan 93, Jayaraman 89, Robinson 98].
- The vectorial tolerancing [Wirtz 89, Wirtz 91, Wirtz 93].
- The declarative tolerancing [Clément 97, Gaunet 94, Sellakh 00].
- The cinematic tolerancing [Rivest 94b].
- And the modeling by limited expansion [Clement 88, Bourdet 95b].

### III.2.b Modeling by limited expansion

Whitney gets the tolerancing linear relation by Taylor series approximation of closed loop equations [Whitney 94]. For his part, Chase develops the DLM (Direct Linearization Method) method [Chase 96]. Franciosa suggests a numerical process to simulate the assembly constraints, using the linearized transition matrices formalism [Franciosa 09]. Canadian team, [Laperrière 00] uses the Jacobian matrix in their "Jacobian torsor" model.

Pierre Bourdet [Bourdet 76] works in small displacements of rigid part hypothesis, to model the positions and orientations deviations of assembly surfaces, with the help of "small displacement torsor" [Ballot 95b, Ballot 97]. The deviations are evaluated between coordinate systems, built on nominal (defined in design engineering) and substitution (perfect shape build on real surfaces) [Kamali-Nejad 09].

## III.3 Taking the assembly into account : Tolerancing equation

### III.3.a Assembly model

To write the relationship between clearance, deviation and geometric requirements variables, the relative assembly paths for each functional requirement must be known. Every serial link between the two functional surfaces is named "assembly path". It is necessary to define what are the link surfaces which have an influence on the functional requirement and to evaluate its sensitivity.

The major work in this domain uses the graph theory [Linares 93], [Teissandier 97]. Different formalism allow us to describe the links, the requirements and the influent parts.

The CLIC method of Bernard Anselmetti models the assembly from axioms and description of the geometry [Anselmetti 02]. With the help of tables of setting position filled by the designer, Anselmetti identifies the primary, secondary and tertiary link surfaces and automatically defines the geometric specification that ensures the functionality of the mechanism.

After the geometric deviations are modeled by mathematical tool and the assembly loop are identified, some methods allow us to describe the relationships between clearance, deviation and functional requirements variables for each assembly loop.

### III.3.b Behavior laws

With the  $\Delta_{tol}$  method [Bourdet 73, Ballot 95a, Thiebault 01], the geometric behavior laws is given by the torsorial equality get, for each closed geometric loop.

However, these equations just model the assembly of part with defects and clearance in regard to the small displacement component. It remains to consider :

- The tolerances values "t" which limit the deviations,
- The contact conditions which limit the clearances.

### III.3.c Jacobian torsors

Canadian teams of Laperrière and Desrochers have developed a mathematical tool that allows to optimize the tolerancing of a mechanism by giving the sensitivity on the functional requirement to each tolerance [Ghie 05]. This model is named "*Unified Jacobian-Torsor Model*".

Each small displacements component of the functional feature is expressed as a product of a matrix which depend on geometry (jacobian matrix) with a column vector composed by the small displacements components of the features that have an influence on the functional feature.

The maximals  $\bar{x}$  and minimals  $\underline{x}$  values of the translations and rotations of each link surfaces which ensure the respect of the functional requirement are evaluated by taking into account the size of surfaces and of tolerance area. These values are calculated independently of each others : the maximal variations of a small displacement component are studied by considering all other null [Desrochers 03]. These results are expressed by a 6x2 matrix, where each column corresponds respectively to the lower and upper limits of each 6 small displacement torsor components.

## III.4 Tolerancing inequalities system treatment

### III.4.a CLIC method (Cotation en Localisation avec Influence des Contacts)

This method of automatically aided tolerancing is based on explicit rules [Anselmetti 08a, Anselmetti 08b]. They allow to translate some geometric and technology (contact priority,...) data, described by the designer in tables, on geometric requirements and then specifications. This method makes also enable, the optimization of geometric and dimensions choices during the design (fig. 1.1).

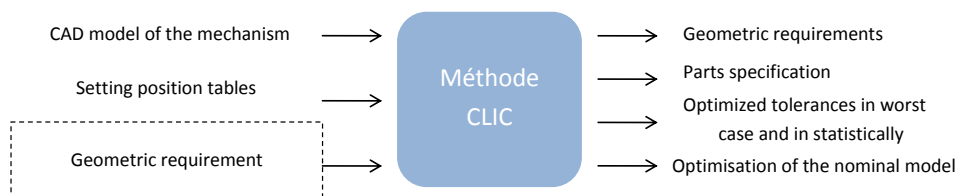


Fig. 1.1 – CLIC method process

This method proceeds in several steps :

- **Assembly model** : description of link from setting position tables.
- **Qualitative tolerancing**
  - ▷ **Links specification** : Definition of the geometric requirements and tolerancing associated to each link [Chavanne 11a, Anselmetti 06].
  - ▷ **Specification synthesis** : Identification of the "link loop" and definition of geometric specification of parts for each functional requirement between a terminal surface and base surface of the mechanism [Anselmetti 10b].
- **Quantitative tolerancing** : Evaluation of the deviations allowed by the previously defined tolerancing. This study is lead thanks to the lines analysis method.

### III.4.b Jacobian torsors

From the "*Unified Jacobian-Torsor Model*" model, Laperrière and Desrochers calculate the contribution of each elementary tolerance " $FE_i$ " for each of 6 study directions " $k$ " (3 rotations and 3 translations) in regard to the respect of the functional requirement. This contribution " $\%C_{FE_{ik}}$ " is evaluated in percentage in regard to all other tolerances " $FE_j$ " (eqn. 1.1)

$$\%C_{FE_{ik}} = \frac{|\bar{C}_{FE_{ik}} - \underline{C}_{FE_{ik}}|}{\sum_{j=1}^N |\bar{C}_{FE_{jk}} - \underline{C}_{FE_{jk}}|} \quad (1.1)$$

This information helps the designer in his quantitative choice of tolerances repartition. However, the assumption of no dependence of limits of small displacement components, makes the evaluation of the relationship between the link surfaces tolerance and functional requirement tolerance, impossible. The optimization of the tolerances chain cannot be on global way but only close to a suggested repartition, done by the designer.

### III.4.c Hyper-spaces

#### ◊ Domain

The domain tool was early defined by Max Giordano [Giordano 99]. This domain represents the allowed small displacement, of one geometric features inside its tolerance area or inside its assembly link. Its building, its representation and its using have been the subject of several research works, to best fit the three-dimensional tolerance chain calculation.

These works are being described, more in details, in following chapter.

#### ◊ T-Maps<sup>®</sup>

The *T-Maps*<sup>®</sup> model developed by J.K. Davidson is a mathematical tool which is based on barycenter theory to model the tolerancing of three-dimensional mechanisms [Jian 01]. Similarly as a point in a phase diagram describes the metal composition, a point in a *T-Maps*<sup>®</sup> describes the position and orientation of a tolerated surface.

This model allows us to add as many dimensions as needed. It thus becomes possible to model the conditions [Ameta 10b] as maximal material condition.

The assembly model and the respect of functional requirements are checked by specific operations on *T-Maps*<sup>®</sup> [Ameta 11, Wu 03].

## IV Aided tolerancing softwares

The aim of all these aided tolerancing methods is to allow the tolerancing optimization and target geometry definition of all three-dimensional mechanisms from the functional requirement definition. To make this optimization enable from the beginning and at every step of the manufacturing cycle, it seems necessary, that it uses the CAD (computer aided design) data. Thus is why, several software or CAD add-in have been developed. Even if some of them are accomplished, no provides a complete answer to every tolerancing problems.

Today, some families of applications or modules of CAD softwares for the tolerancing aided are distinguished :

- The tolerancing analysis softwares : that are based on statistical calculation method to give a no-respect of the functional requirement rate, in regards to the geometric data and setting tolerancing (*eM-Tol-MAté*<sup>®</sup> [Technomatix], *Tolérance Manager*<sup>®</sup> or *CETOL 6σ*<sup>®</sup> [Sigmetrix], ...).
- The specification aided softwares : That suggest and check the kind of geometric specification choice by the designer, in regards to geometric data and standards [Legrais 05].
- The tolerancing synthesis aided softwares : that are based on tool and mathematical model to simulate and optimize the geometrics choices of the designer (*MecaMaster*<sup>®</sup>, *AnaTol*<sup>®</sup>, ...).

## I Objectives

This second chapter introduces the three-dimensional aided tolerancing aided method developed in the SYMME laboratory. This method is based on the domain model of geometric deviation. This model is define in the displacements space. These domains are convex polytopes equivalent to finite set of inequalities. This model use the assumption of small displacements of rigid part. The parametrization is shown in first part. Then, we are describing the modeling approach of different geometric features. At last, we are going to make an inventory of all kind of mechanism topology for which one resolution method should be defined.

## II Geometric tolerancing model with domain tool

The tolerancing and the clearances in links involves some geometric variations for which we evaluate the extent and sensitivity on the mechanism functionality.

### II.1 Geometry

#### II.1.a Hypothesis

The geometric tolerancing model with domain tool needs some conditions. Subsequently, we make the assumption that :

- Mechanisms are composed of rigid parts. Their strain are supposed insignificant in regards to geometric deviation
  - Comment* : This hypothesis involves a over-quality risk. Indeed, some mechanisms can be put off even if their assembly could be possible with controlled strains. Some works were done to improve the model taking into account the elastic deformations of parts [[Petit 04](#), [Samper 07](#)].
- The shape defects are insignificant. A substitute surface is associated to the points cloud extracted from the measurement of the real surface. The associated criterion is defined before, according to the kind of surface, tolerancing and of the calculation : least squares, tangential outside material which minimizes the maximal deviation for a datum surface or to ensure the assembly feasibility, ... Pierre-Antoine Adragna has shown that the shape deviations could be neglected when the clearance was larger [[Adragna 10](#)].
- The position and orientation deviations of substituted surface in regards to the nominal and the clearances, are supposed enough small to be able to linearize the displacements (small displacement assumption).

## II.1.b Parametrization

The geometric variations allowed by the tolerancing and clearances, are characterized by the position of coordinate systems associated to geometric features. For one part, some different geometry and coordinate system can be defined :

- The nominal geometry, which defines the theoretical shape of part (equivalent to the nominal model of *GeoSpelling* language [Ballu 01]). From this geometry, we can build :
  - ▷ A coordinate system  $R_G$  which sets the position and orientation of the part (defined at the inertial center of the part or built from some surfaces of the part for example)
  - ▷ A datum coordinate system  $R_R$  for each datum system. Built and positioned in regards to the nominal surface of datum, this coordinate system has the same degree of freedom than the datum system.
  - ▷ A coordinate system  $R_N$  associated to each nominal functional surface of the part. In regards to the invariance class of the surface [Clément 97], an equivalence class can be associated to the coordinate system (two coordinate system are equivalent if for all positions of one, there exists a position of the other in accordance with the displacements of the given class that enables them to be coinciding).
- A real geometry extracted from the measurement (equivalent of the "Skin" model of the *GeoSpelling* language [Ballu 01]).
- A substitute geometry built from the geometry extracted from the measurement. For each real surface extracted, one criterion allows us to set a perfect shape surface
  - ▷ A coordinate system  $R_S$  is built from each substitute surface. This coordinate system has the same degree of freedom than the perfect shape associated. It defines the position and orientation of the substitute surface.

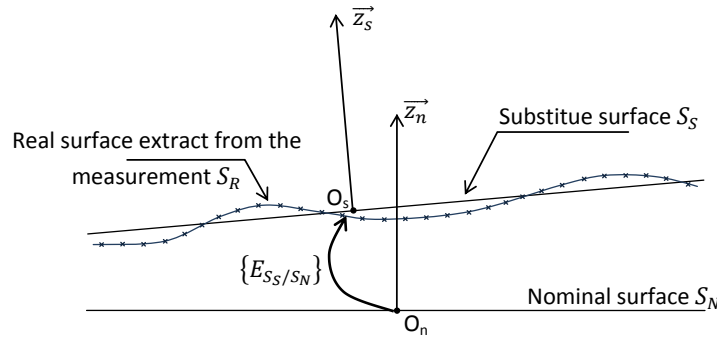


Fig. 2.1 – Nominal and substitute surfaces with their associated coordinate system

→ Thus, the deviation and clearance, in position and orientation, can be modeled by a small displacements torsor, representing the relative position between the nominal coordinate system and the substitute coordinate system (fig. 2.1).

*Comment :* In regards to the problem, we can use other perfect theoretical geometry, with the same property than the nominal geometry defined during design, such as :

- A target geometry which defines the perfect theoretical shape of the part, in case of symmetrical tolerancing repartition.
- A maximal material geometry (maximal dimensions for the outside surfaces and minimal dimensions for the inside surfaces) or minimal materials geometry (minimal dimensions for the outside surfaces and maximal dimensions for the inside surfaces).

### II.1.c Functional requirement

A functional requirement describes functional suitability (assembly feasibility, sealing, ...). It is introduced by some geometric constraints (minimal clearance, adjustment, ...) on the terminal surfaces called "functional surfaces". These constraints affect all the link surfaces of the assembly paths between functional surfaces.

These geometric constraints are modeled by the functional tolerancing. In accordance with the standard ISO 1101 [NF-EN-ISO-1101 06] which defines area in which the geometric variation of the tolerated surface are limited. The real surface must be included in this tolerance area.

On a unique part, The tolerance area is defined by :

- **Its shape** : Totally defined by the topology of the tolerated surface.
- **Its spread and its position** : by default, a tolerance area is applied on the all expense of the tolerated surface. In some cases, it can be applied on a projection of the surface in a outside area (tolerancing by projection area) or only on a restricted area of the surface.
- **Its size** : Defined by the value "t" of the tolerance.
- **Its degree of freedom** : defined by :
  - ▷ *datum* : The datum system can be simple (only one datum surface) or composed (group of datum surfaces ordered or not). The tolerance area is set in position in regards to this datum system. Thus, the area has the same degree of freedom than the datum system.
  - ▷ *Kind of specification* :
    - *Shape* : In case of shape tolerancing, the tolerance area keeps it all degree of freedom to include the tolerated surface in it.
    - *Orientation* : The rotation degrees of freedom of the tolerance area are set to limit those of the tolerated surface.
    - *Location* : The tolerance area degrees of freedom are set by the datum system to limit those of the tolerated surface.
  - ▷ *Toleranced surface degree of freedom*

The geometric variations of one part, limited by the tolerancing, have a impact on the whole mechanism. Thus, it must be studied in its entirety. The sensitivity of geometric variations cannot be taken into account in the same way, according to the clearance role in the assembly. Jean-Yves Dantan identifies two separate cases that he distinguishes using mathematical operators ( $\forall$ ,  $\exists$ ) [Dantan 09]. In the same way, we are speaking about :

- **Unfavorable clearances** : when the functional requirement must be checked for all ( $\forall$ ) configurations of link clearances.
- **Favorable clearances** : when there must exist ( $\exists$ ) at least one configuration such that the functional requirement is respected.
- **Given clearances** : when the functional requirement must be respected for one given configuration of clearance also called "polarized clearance" [Hoecke 12].

## II.2 Deviations domains

The deviations domains are mathematical tools. They represent the spread of small displacements allowed by the tolerancing of a geometric feature. This modeling is thus defined in a less than or equal 6 dimensions space (3 translations and 3 rotations).

The modeling by "domains" is based on the small displacements theory. The geometric variations are represented by a small displacements torsor named "deviation torsor" between the coordinate system associated to the substitute surface and those of the nominal surface. By taking into account the geometric dimensions and the size "t" of the tolerance area, we define an inequalities system between the small displacements components, the geometric dimensions and the value "t" of the tolerance. This inequalities system is get by limiting the displacement of characteristic points of the geometric feature inside its tolerance area. Each inequality defines a half hyper-space. The intersection of all of those half hyper-



space represents the deviations domain.

When the tolerance describe a functional requirement, each hyper-plane of the border is called "elementary functional requirement"<sup>1</sup>. But unlike for the deviation domain, the indeterminate directions of the functional requirement domain are unlimited.

The deviations domains allow to express the standard tolerancing by a mathematical tool which is adapted to the calculation of the three-dimensional tolerances chain. The section of his domain in a less or equal 3 dimensions space, gives us a graphic representation that we will use to illustrate our calculation methods.

Components of small displacements which are not measurable in control point of view (degree of freedom of the surface or of the datum system) can be taken into account in the qualifying of the part and will be set to zero by convention.

### II.3 Clearances domain

The clearances domains allow to model, in a similar way than deviations domains, the whole relative geometric variations between two theoretical perfect surfaces in contact, with or without clearance.

We use the same assumption of small displacement of rigid parts, than for the deviations domains. The displacements allowed by link geometry can be represented with a small displacements torsor named "clearance torsor".

Unlike than for the deviations domains, the small displacements components associated to the degree of freedom of the link are unlimited. indeed, a variation on a such direction cannot be evaluated as a defect but must be taken into account in the assembly. This variation will thus be considered as a variation involved by clearances. We find the fact that the defects in this such direction are not measurable and have no influences on the functional requirement respect again.

## III Assembly modeling

### III.1 Analysis graphs of the structure

The graph that we use in SYMME laboratory [Giordano 05] represents the connections between the characteristics coordinates systems of the mechanism (fig. 2.2). This graph is made of vertices associated to coordinates system built on geometric features and edges associated to their link. To make the reading and understanding of the structure easier, the part are represented by an ellipse. The vertices placed in the center of ellipse corresponds to a part coordinate system. The others, placed on the border of the ellipses, represent the coordinates systems of substitute surfaces built from the real surfaces. The links can be of two types. A link between a part coordinates system and a surface coordinates system represents a deviation. By the same way, a link between two surface coordinate systems represents a clearance.

A deviation domain is associated to each edge between a part coordinates system and a surface coordinates system. By the same way, a clearances domain is associated to each edge between two surface coordinates systems.

---

1. By analogy, we can associated the elementary functional requirement composing the domain at the analysis lines use by B. Anselmetti in his CLIC method [Chavanne 09a]

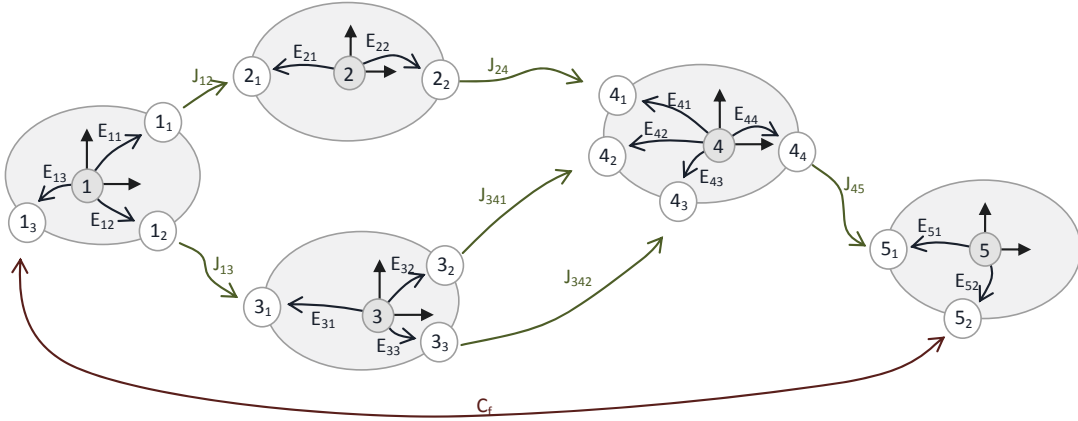


Fig. 2.2 – Example of analysis graph by Giordano [Giordano 05]

*Comment :* Generally, we build only one part coordinates system from which the whole linked surfaces are toleranced ("star" tolerancing). However, we can have several part coordinates systems toleranced between each other (group of link surfaces) or none (two link surfaces connected by a deviation torsor).

### III.2 Architecture of three-dimension mechanisms

At each kind of mechanism architecture is associated one resolution method for the tolerancing problems. There exist two major family of mechanisms : The serial assembly and parallel assembly (their treatment will be detailed in following chapter).

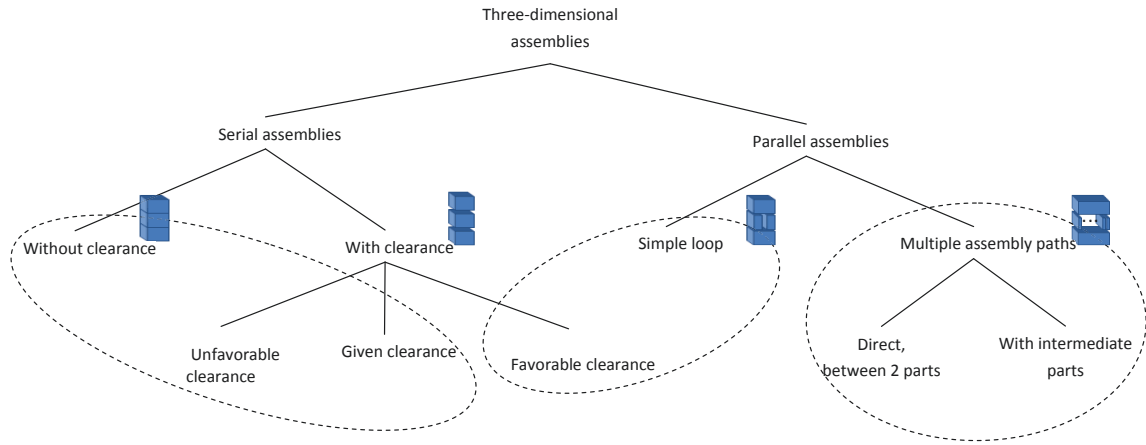


Fig. 2.3 – Breaking down of the three-dimensional assembly in elementary topologies

By considering that the major part of mechanisms can be defined as the composition of these basic topology families, the resolution requires the local treatment of each sub-part, up to the overall resolution (cf. chapter 5).

### III.3 Handling of the domains

#### III.3.a Double definition of polytopes

In an informatics way, polytopes can be defined by two ways [Fukuda 96] :

- **H-representation** : each inequality of the system which defines the polytope represents a border hyper-plane. The H-representation is the representation of the convex domain by the list of equations of its border hyper-plane.
- **V-representation** : The convex domain is defined as the intersection of half hyper-space limited by hyper-planes. The intersection of these hyper-planes defines the vertices of the convex domain. The list of these vertices is named "V-representation"

The *cdd+* software developed by Fukuda allows to convert each representation in the other one.

#### III.3.b Decoupling shape and size of the domains

In our application, the shape and size of the domains can be decoupled. Indeed, the shape depends on the topology of the surfaces, while the size depends on the geometric parameters (tolerances or dimensions).

We define the multiplication of a domain by a scalar  $h$  as the homothetic transformation of  $h$  coefficient and centered on the origin of the domain.

Thus, a deviations domain  $[E]$  will be defined by the value  $t$  of the associated tolerance, that multiplies the normed deviation domain  $[e]$  (eqn. 2.1). The normed deviation domain is calculated when  $t = 1$ .

$$[E] = t * [e] \tag{2.1}$$

In the same way, the clearance domain  $[J]$  will be defined by the nominal clearance value  $j$  that multiplies the normed clearance domain  $[j]$  calculated when  $j = 1$  (eqn. 2.2).

$$[J] = j * [j] \tag{2.2}$$

## I Objectives

This chapter shows the resolution method of tolerancing problem, for assemblies which only have some serial link. As far as the qualitative and quantitative tolerancing problems are closely tied, we suggest some calculation method which make enable the simultaneous resolution for this mechanism topology. The modeling with the domain tool allows to demonstrate the piecewise linearity of the tolerancing equations. These relations will be generated from only the geometric definition of the assembly with the help of the concept of sensitivity coefficient. At last, we are presenting how we can use our results to optimize the overall tolerancing of a three-dimensional mechanism.

## II Presentation

In this kind of architecture, each part is composed by two link surfaces. The functional requirement is applied between one surface of the first part and one of the last part of the assembly.

## III Serial assembly without clearance

### III.1 Didactic example of stack-up assembly without clearance

That is the didactic example following (fig. 3.1) :

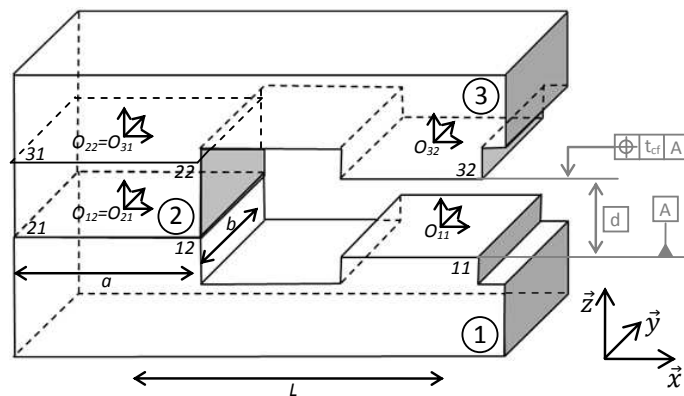


Fig. 3.1 – Didactic example of simple stack-up without clearance

Each part  $p$  is composed by 2 link surfaces,  $p1$  and  $p2$ , that we keep free to have or not some geometric deviations. A tolerance area which size is defined by the value  $t_{ps}$  is associated to each link surface. Thus, the qualitative tolerancing (definition of datum surfaces) is kept free and can be optimized in the same time than the quantitative tolerancing.

The functional requirement is respected in worst case if and only if the resultant deviation domain  $[E]$  obtained by the *Minkowski* sum of all deviations domains is included in the functional requirement domain  $[C_f]$ .

### III.2 New Method of Calculation

A calculation of the *Minkowski* sum of two domains may be obtained through a polytope containing all the points of the second domain while its origin moves over the set of vertices of the first domain. However, the complexity increases exponentially, as a function of the number of domains (for  $n$  domains of  $m$  vertices, we calculate  $m^n$  points).

In addition, the classical method of tolerances analysis (cf. § III.4.b and cf. § III.4.a in chapter 1) doesn't give directly the linear relation between the resultant deviations domain and the tolerance values. The linear coefficients could be evaluated by considering that the relation is linear, thanks to variation of each tolerance value. But this method would not yield the proof that the relation is linear. Whereas, the new method proves that the relation is, in fact, piecewise linear. The previous linear coefficient calculation algorithm, likely introduces mistakes because of its piecewise linearity.

#### III.2.a Evaluation of Influence Coefficients

To reduce computational complexity, we propose to take into consideration, for each deviations domain, only the situation (vertex) that is least favorable for the elementary functional condition rather than the complete set of vertices. This concept was already introduced in previous works : B. Anselmetti [Anselmetti 06] considers an elementary functional condition, i. e. a condition with only one inequality  $H_i$  and looks for an unfavorable line of analysis. O.W. Salomons [Salomons 96a] also uses this principle in analyzing functional clearances in a given direction.

In each deviations domain  $[E_{ps}]$ , we are looking for the minimum value of tolerance  $t_{cf,i,ps}$  ensuring compliance with the elementary condition  $H_i$  in the worst case. This condition is obtained when the boundary hyperplane  $H_i$  intersects the least favorable vertex of the deviations domain.

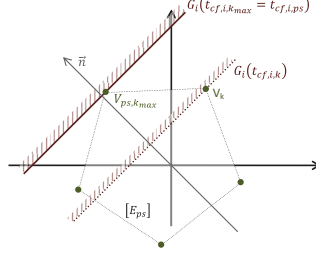
Let  $V_{ps,k}$  be the  $k$  - th vertex of deviations domain  $[E_{ps}]$ , then from the equation (eqn : ??), the equation of boundary hyperplane  $H_i$  intersecting vertex  $V_{ps,k}$  of deviations domain  $[E_{ps}]$  is given by (eqn : 3.1) :

$$H_i : t_{cf,i,k} = \sum_{j=1}^6 a_{i,j} \cdot V_{ps,j,k} \quad (3.1)$$

Elementary requirement  $H_i$  is complied with if, and only if, the deviations domain is completely included in such requirement. Therefore, the vertex least favorable to elementary condition  $H_i$  will be the vertex which requires the "functional condition" domain to have the greatest dimension, and consequently, parameter  $t_{Cf}$  to have the greatest value. Hence, (eqn : 3.2)

$$t_{cf,i,ps} = \max_k \{t_{cf,i,k}\} = \max_k \left\{ \sum_{j=1}^6 a_{i,j} \cdot V_{ps,j,k} \right\} \quad (3.2)$$

Thus, we obtain domain vertex  $[E_{ps}]$  corresponding to the least favorable defect configuration from the standpoint of elementary condition  $H_i$  (fig : 3.2) as well as the minimum value of the minimum functional tolerance which ensures compliance with elementary condition  $H_i$  in the worst case.


 Fig. 3.2 – Illustration of Locating an Unfavorable Vertex  $V_{ps,kmax}$ 

When this examination is applied to each deviations domain  $[E_{ps}]$ , elementary condition  $H_i$  is complied with in the worst case if, and only if, the sum of these least favorable cases is still compliant with the elementary condition (eqn : 3.3) :

$$\begin{aligned}
 t_{cf} &\geq \sum_{ps} t_{cf,i,ps} \\
 t_{cf} &\geq \sum_{ps} \max_k \left\{ \sum_{j=1}^6 a_{i,j} \cdot V_{ps,j,k} \right\} = \sum_{ps} \underbrace{\max_k \left\{ \sum_{j=1}^6 a_{i,j} \cdot v_{ps,j,k} \right\}}_{c_{i,ps}} * t_{ps} \\
 \Rightarrow t_{cf} &\geq \sum_{ps} c_{i,ps} * t_{ps} = t_{cf,i}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$c_{i,ps}$  will be referred to as the influence coefficient of surface  $ps$  on elementary condition  $H_i$ .

### III.2.b Compliance with Functional Condition

By performing the calculation for each elementary condition  $H_i$ , we obtain all the linear inequalities translating compliance with the functional condition in the worst case (eqn. 3.4).

$$\forall i, \quad t_{cf} \geq t_{cf,i} = \sum_{ps} c_{i,ps} * t_{ps} \tag{3.4}$$

In our example, for the 8 elementary functional conditions  $H_i$  we obtain :

$$H_i : t_{cf} \geq c_{i,11} * t_{11} + c_{i,12} * t_{12} + c_{i,21} * t_{21} + c_{i,22} * t_{22} + c_{i,31} * t_{31} + c_{i,32} * t_{32} \tag{3.5}$$

For the sake of a hypothesis, let  $\frac{2.L}{a} > 1$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_1, H_2, H_7, H_8 : & t_{cf} \geq 1 * t_{11} + \alpha_1 * t_{12} + \alpha_1 * t_{21} + \alpha_1 * t_{22} + \alpha_1 * t_{31} + 1 * t_{32} \\ H_3, H_4, H_5, H_6 : & t_{cf} \geq 1 * t_{11} + \alpha_2 * t_{12} + \alpha_2 * t_{21} + \alpha_2 * t_{22} + \alpha_2 * t_{31} + 1 * t_{32} \\ & \alpha_1 = \frac{2.L}{a} - 1 \\ & \alpha_2 = \frac{2.L}{a} + 1 \end{array} \right. \tag{3.6}$$

In this particular case, whatever the allocation of tolerances  $t_{ps}$ , the limiting condition  $H_i$  is always the same. The linear relation is as follows (eqn. 3.7) :

$$t_{cf} \geq 1 * t_{11} + \left( \frac{2.L}{a} + 1 \right) * t_{12} + \left( \frac{2.L}{a} + 1 \right) * t_{21} + \left( \frac{2.L}{a} + 1 \right) * t_{22} + \left( \frac{2.L}{a} + 1 \right) * t_{31} + 1 * t_{32} \tag{3.7}$$

Depending on the specific elementary condition in question, influence coefficients  $c_{i,ps}$  are not necessarily the same. Therefore, the limiting inequality won't necessarily be the same, given the selected tolerance allocation. Therefore, in the general case, the condition of meeting the functional condition is piecewise linear with respect to the tolerances for each surface  $t_{ps}$ .

### III.2.c Algorithm

```

For i=1 to number of elementary conditions ( $H_i : t_{cf_i} \geq \sum_{j=1}^6 a_{i,j} \cdot x_j$ )
    For ps=1 to number of surfaces making up the assembly loop.
        For k=1 to number of vertices
             $c_{i,ps,k} = \sum_{j=1}^6 a_{i,j} * v_{ps,j,k}$ 
        End For
         $c_{i,ps} = \underset{k}{Max}(c_{i,ps,k})$ 
    End For
     $t_{cf_i} = \sum_{ps} c_{i,ps} * t_{ps}$ 
End For

```

Thus, the growth of computation complexity is reduced to a relationship proportional to the number of vertices in each deviations domain, as opposed to exponential growth for the method of *Minkowski* sums used until now [Teissandier 99b], [Wu 03], [Mujezinovic 04], [Petit 04]. Compliance with the functional condition in the worst case is now expressed as a system of linear inequalities. Obviously, this method of mathematical expression enables us to perform tolerance analysis for a serial assembly without clearance but also to optimize the geometry during preliminary design (minimize influence coefficients using geometric optimization) and to develop a specification and tolerance allocation during detail design. In fact, in the type of assembly of interests here (simple stack), each part has no more than 2 surfaces which are completely specified by taking one of the surfaces as a datum to tolerance the other one. If the surface with the higher influence coefficient is taken as a datum, its deviations no longer have an effect, and we get wider tolerance ranges. This optimization of tolerance allocation is only possible if the specification is developed at the same time as the tolerance synthesis.

In our example, by assigning to each component a datum surface we obtain the following linear system for compliance with the functional condition (eqn. 3.8)

$$t_{cf} \geq 1 * t_{11} + \left( \frac{2.L}{a} + 1 \right) * t_{22} + 1 * t_{32} \quad (3.8)$$

In conclusion, thanks to this new method of calculation, we were able to demonstrate that for every mechanical system composed on serial linkages, the relationship between satisfying a functional condition in the worst case and the geometric tolerances on the various surfaces is piecewise linear.

This relationship enables us :

- to minimize the influence coefficients affecting the geometry.
- to define a specification system to maximize tolerance ranges. In fact, surfaces with high influence coefficients will preferably be used as datums.
- to define an optimal allocation of tolerances that satisfies the functional condition in the worst case (tolerance synthesis) with the lowest cost.

## IV Simple Stacking with Clearance

Clearances may have different roles to play in the operation of a mechanism [Dantan 05]. For each of those, we must define a specific method of calculation.

We identify three families of clearances :

- *Unfavorable clearances* : Let  $[C_f]$  functional condition, it is desirable that it be met whatever the configuration of clearances  $\vec{J}$  and whatever the deviations  $\vec{E}$  (eqn. 3.9).

$$\begin{aligned} \forall \vec{E} \in [E] \text{ et } \forall \vec{J} \in [J] \\ (\vec{E} + \vec{J}) \in [C_f] \end{aligned} \quad (3.9)$$

In this case, clearances have the same behavior as deviations. Their influence coefficient is calculated in the same way as shown previously and they are introduced into the linear relationship for the same reasons as deviations. Thus, for each elementary functional condition  $H_i$  we obtain (eqn. 3.10) :

$$\forall H_i, \quad t_{cf} \geq \sum_{ps} c_{i,ps} * t_{ps} + \sum_j c_{i,j} * j_j \quad (3.10)$$

A study of the tolerancing with unfavorable clearances corresponds to an accurate problem (clearance mustn't be too high to ensure the relative position of the functional surfaces). Thus, it's consistent to obtain the clearance  $j_j$  calculated with a nominal geometry and dimension in minimal materials (clearance value maximal (worst case)).

- *Given clearances* : We need the functional condition to be satisfied in the given clearance configuration  $J_d$  (eqn. 3.11)

$$\begin{aligned} \text{For : } \quad & \vec{J}_d \in [J] \text{ given} \\ & \forall \vec{E} \in [E] \\ & (\vec{E} + \vec{J}_d) \in [C_f] \end{aligned} \quad (3.11)$$

In this case, the given clearance could be regarded as an unfavorable clearance domain that contains a single vertex. Therefore, the method of calculation as well as the resulting linear relationship are the same as previously (eqn. 3.10). Thus, we get (eqn. 3.12) :

$$\forall H_i, \quad t_{cf} \geq \sum_{ps} c_{i,ps} * t_{ps} + \sum_d c_{i,d} * j_d \quad (3.12)$$

- *Favorable clearances* : As shown in Figure (fig. 3.3), we would there to be at least one clearance configuration  $\vec{J}$  which allows the functional condition to be met whatever the deviations  $\vec{E}$  (eqn. 3.13)

$$\begin{aligned} \forall \vec{E} \in [E] \\ \exists \vec{J} \in [J] \text{ Such that : } (\vec{E} + \vec{J}) \in [C_f] \end{aligned} \quad (3.13)$$

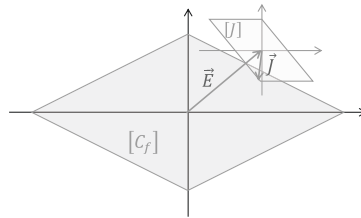


Fig. 3.3 –  $(\vec{E} + \vec{J}) \in [C_f]$

In this case, clearances are used to increase the domain in which the assembly's resultant deviations domain must keep. Therefore, they play a role similar to that of the functional condition.



Consequently, the specified deviation tolerance is obtained by adding the tolerance related to just the functional condition and the tolerance related to just the favorable clearances (eqn. 3.14)

$$\forall H_i, \quad t_{cf} + \sum_j c_{i,j} * j_j \geq \sum_{ps} c_{i,ps} * t_{ps} \quad (3.14)$$

A study of the tolerancing with favorable clearances correspond to an assembly feasibility problem (with functional requirement null, we obtain the relation  $[E] \subset [J]$ ). Thus, it's consistent to obtain the clearance  $j_j$  calculated with a nominal geometry and dimensions in maximal materials (clearance value minimal (worst case)).

## V Tolerance Allocation

The system of inequalities above has multiple solutions. We can formulate the problem in such a way as to look for an optimal solution from an economic standpoint. To do this, we will express cost as a function of tolerances, and we will attempt to minimize it. Thus, we are dealing with an optimization problem with constraints for which numerous works have already been written : Cost/Loss Function Optimization, Dakin's Method [Löf 05], ...

Thus, we are going to look for an optimal allocation of tolerances that satisfies the inequalities above (constraints) while minimizing the cost function.

We could assume that the smaller the tolerances are, the higher the manufacturing cost is. Numerous functions have already been proposed to model this type of change in the cost as a function of tolerances [Chase 91]. Based on the reciprocal cost function defined by Chase and Parkinson, the function to be optimized is as follows (eqn. 3.15) :

$$C = A + \frac{b_{11}}{t_{11}} + \frac{b_{22}}{t_{22}} + \frac{b_{32}}{t_{32}} \quad (3.15)$$

The coefficient  $A$  represents the fixed costs (machine setup, material, ...). This coefficient has no effect on the optimization of tolerance allocation and will, therefore, be considered to be null. The coefficients  $b_i$  depend on the degree of difficulty encountered in meeting the tolerance  $t_i$ . In our example, we will assume that it is also difficult to satisfy each tolerance. The cost function can, therefore, be modeled by  $b_{11} = b_{22} = b_{32}$ .

The minimization of the cost function allows to calculate the tolerances, knowing the value of functional tolerance  $t_{cf}$  and clearances  $j_j$  in regards to the constraints defined by the equations (eqn. 3.4) or (eqn. 3.14).

## VI Probabilistic approach

The piecewise linear relation obtained in worst case can be use in statistical analysis of the tolerancing.

A simulation must be lead by considering the geometric and dimensioning deviations (limited by tolerancing) as random variables. Some probability density and statistical correlation laws are associated to random variables and the no conformity risk is evaluated by Monte-Carlo method [Germain 07]. By varying the extent of random variables, and with a significant number of random sampling, we obtain a value of the no conformity rate in regards to the tolerance repartition.

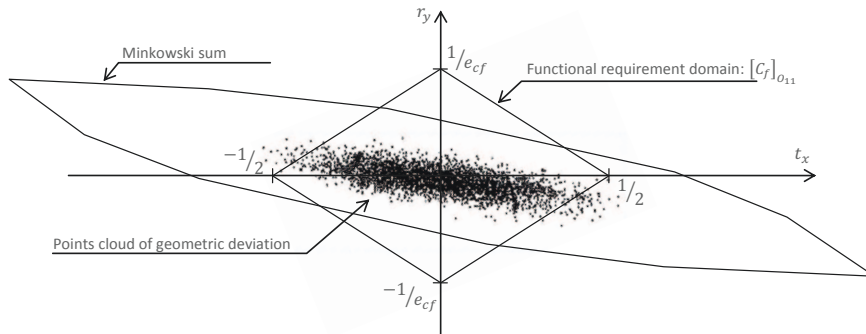


Fig. 3.4 – Points cloud of geometric deviation randomly generated

## I Objectives

In this chapter we study assemblies which have some parallel links. This kind of assemblies involves new constraints that are complex to resolve with linear operations. In first time, we present the conditions on the domains which ensure the respect of the functional requirement in worst case. Then, we are studying the statistical analysis of the tolerancing with Monte-Carlo methods. This method becomes possible, thanks to the simplification of the polytopes operations. This simplification is obtain by a new representation of the clearances and deviations domains. This new representation was developed and set in the *SYMME* laboratory to optimize the use of the domain tool in tolerancing problems.

## II Presentation

### II.1 Assembly

An assembly with parallel links connects two parts by different assembly paths. These assembly paths can be direct or composed by several parts and intermediate surfaces. These second can be considered like simple stack-up assembly and treated like them [Mansuy 11]. Thus, an equivalent clearance and an equivalent deviation domain can be associated to them. So, they become a direct assembly path.

### II.2 Functional requirement

Generally, this topology is over constrain. So, the assembly feasibility is not necessary ensured. The mechanism functionality must be taken into account throughout two studies :

- **An accuracy condition** : Relative position and orientation of the coordinate system associated of the functional surfaces
- **An assembly feasibility condition** : Evaluation of the clearance inside the assembly paths to ensure the assembly feasibility without strains [Samper 07].

The geometric functional requirement is modeled by the area tolerancing, according to the international standard [NF-EN-ISO-1101 06, ISO-8015 85]. The value of the tolerance is named  $t_{cf}$  and the associated domain of the functional requirement is called  $[C_f] = t_{cf} * [c_f]$

### III Worst case approach

In worst case, We would like to express the respect of the functional requirement by linear inequalities system, between the functional tolerance value  $t_{cf}$  and tolerance value associated of the link surfaces  $t_{ps}$ .

The functional requirements are represented by tolerance area. With the domains method, each tolerance area is modeling by a convex polytope. The border of this convex polytope is made of hyper-planes that we called "elementary functional requirement".

Subsequently, the three-dimensional tolerancing problems are analyzed by operations on domains and no scalars. The scalars equations will be generated the latest by the results domains that we get. To be more clear, only the domains relations which ensure the respect of the functional requirement will be described in a first time. The calculation algorithms on the domains will be studied in a second time.

For each assembly paths "c", some kind of clearances domains are defined [Petit 04] :

- **The stack-up clearances domain**  $[J_c] = j_c * [j_c]$  : *Minkowski* sum of all the clearance domains composing the assembly path "c".
- **The shifted clearance domain**  $[J_{c,dec}]$  : that is  $\vec{E}_c$  the deviation torsor of all the geometric deviation inside the assembly path "c" :  $[J_{c,dec}] = \vec{E}_c + [J_c]$ .
- **The residual clearance domain**  $[J_{c,r}]$  : intersection of the all shifted clearance domain  $[J_{c,dec}]$  when  $\vec{E}_c$  is taken in the whole deviation domain  $[E_c]$  of the assembly path "c". The residual clearance domain  $[J_{c,r}]$  represents all the positions and orientations always reachable by the terminal surface of the assembly path "c", whatever the deviations are.
- **The resultant clearance domain**  $[J_r]$  : intersection of all the residual clearances domain  $[J_{c,r}]$  of each assembly path "c". This domain represents all the positions and orientations always reachable by the terminal surface, whatever the geometric deviations are.
- **The inaccuracy stack-up domain**  $[I_c]$  : all positions and orientations reachable by the terminal surface of the assembly path "c" obtained by the *Minkowski* sum of all deviations and clearances domains of the assembly path "c".
- **The resultant inaccuracy domain**  $[I]$  : intersection of all inaccuracy stack-up domain  $[I_c]$ . This domain represents all the positions and orientations in which the terminal surface can be.

According to the functionality studied or the role of the clearance in the assembly, the respect of the functional requirement in worst case is traduced by different conditions on the calculated clearance domain :

- **Assembly feasibility condition** : An efficient condition of the assembly feasibility is that the resultant clearance domain exists (intersection not null).
- **Accuracy condition** :
  - ▷ *Respect of the functional requirement with favorable clearances* ( $\exists$ ) : An efficient condition of the respect of the geometric requirement is that the intersection of the resultant clearances domain  $[J_r]$  with the functional requirement  $[C_f]$  domain is not null (partial inclusion of the resultant clearance domain  $[J_r]$  in the functional requirement domain  $[C_f]$ ).

According to the previous results, for the assembly feasibility and for the respect of the functional requirement with favorable clearances, the resultant clearances domain is define with the maximal material condition.

- ▷ *Respect of the functional requirement with unfavorable clearances* ( $\forall$ ) : The geometric requirement is respected if and only if, the domain defined by the *Minkowski* sum of deviation domain of the two functional surfaces, with the resultant inaccuracy domain

$[I]$  is included in the functional requirement domain  $[C_f]$ .

According to the previous results, the resultant inaccuracy domain  $[I]$  is defined with the minimal material condition.

The scalar equations system of tolerancing is the system which defines the result domain. The inequalities system of the respect, in worst case, of the functional requirement is generated by the condition on the result domain.

## IV Statistical approach

For this mechanisms topology, we focus on the statistical analysis of the tolerancing. The qualitative tolerancing is defined previously by rules, according to the kind and functionality of the surfaces.

To realize this statistical analysis of the tolerancing, we use a Monte-Carlo simulation with the following random variables :

- *The small displacements components of the deviation torsor* : These random variables are generated for each tolerated surface and represent the position and orientation deviation of the link surface.

We don't handle deviation domains during the statistical analysis. Only the random torsor is generated and used in the calculations. However, the shape of the domain can be used to define the density probability of the random variables in their associated tolerance area.

- *The geometric dimensions* : These random variables are generated for each link that defines the size of the corresponding clearance domains.

During the statistical analysis, the shape of the clearance domain was kept. Only the size, parametrized by a scalar  $J$  is a random variable. This property shows the interest of modeling the internal clearance by "clearance domain".

By using the Monte-Carlo method, for each sample, we build the shifted clearance domains. These domains are shifted by the deviations. We deduce the resultant domains and we can check :

- *The assembly feasibility* : The assembly is possible if the intersection of the shifted clearance domains exists.
- *The position set defect* : If the assembly is possible, the position deviation can be evaluated in two different ways :
  - ▷ When they have to respect a functional requirement : The functional requirement is respected if the resultant clearance domain is include in the functional requirement domain.
  - ▷ When they have to be taken into account in an overall assembly (cf. chapter 5) : According to the role of the clearances in the assembly loop, the resultant clearance domain is taken into account in two different ways :
    - In the case of favorable clearance : the resultant clearance domain is considered as an equivalent clearance domain for the link
    - In the case of unfavorable clearance : The configuration in the resultant clearance domain is considered as a equivalent deviation for the link.

The quality of the simulation depending on the number of statistical samples and on the statistical laws chosen for each random variables. A convergence test of the results allows us to define the optimal number of significant number of samples. Some measurement campaigns during the all manufacturing cycle of the product, make enable to improve the density probability and possible dependence between random variables.

## V Generic algorithm of the analysis tolerancing

The equation of the problem and the calculations can be reduced to operations on polytopes.

The resolution of the tolerancing problems of three-dimensional assembly in worst case or by a statistical method is reduced to domains operations. The generic algorithm of the tolerance analysis is described below (fig. 4.1) :

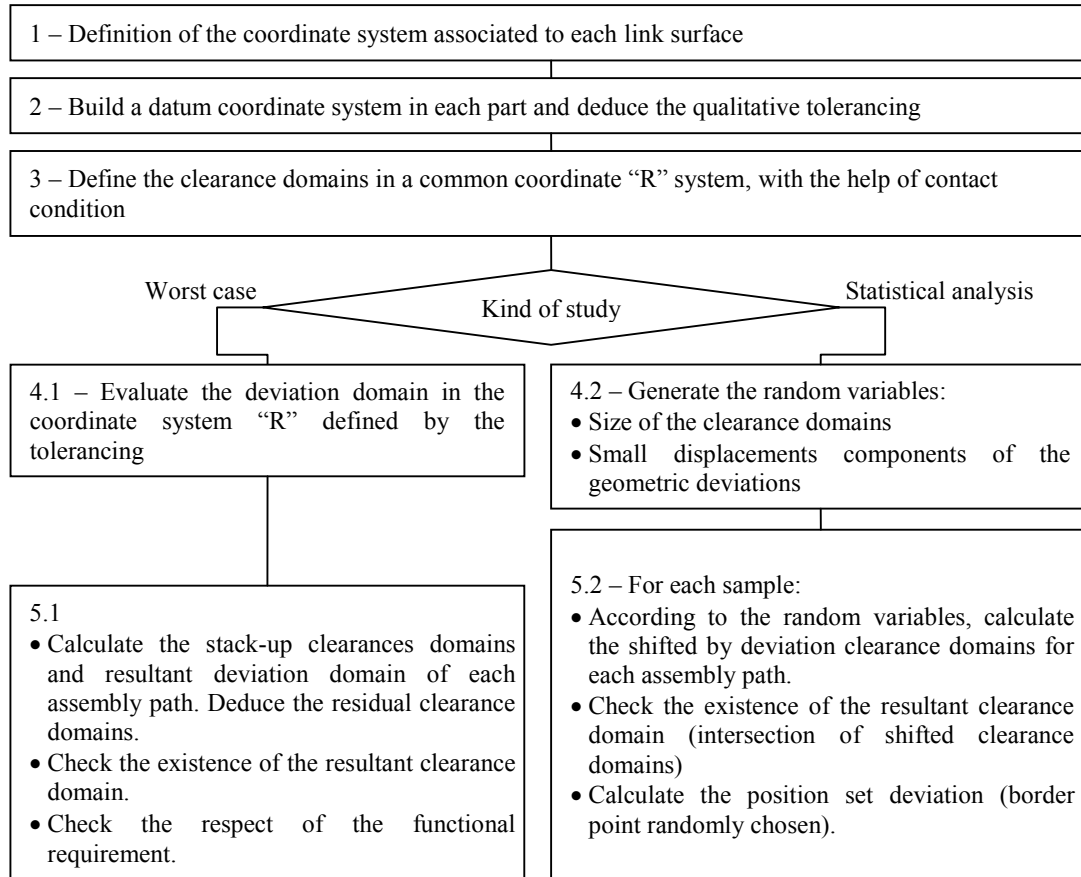


Fig. 4.1 – Generic algorithm of the tolerancing analysis

The equations setting and the treatment of problem of tolerancing analysis in worst case or in statistical for all kind of assembly with parallel links are generically defined with a formal algorithm. Indeed, up to now, this kind of problem was resolved by reducing in case by case the parallel link in serial link, with the help of an assemblies examples database [Chavanne 09a], or by considering only the exact constraint links [Singh 09].

## VI Calculation method on the domains

We identify two major operations on domains, to do the statistical analysis of the tolerancing : The addition (*Minkowski* sum) and the intersection of domains. To solve the problem of large calculations that need this kind of operations, we suggest a new representation of the domains, that allows to simplify these operations.

## VI.1 Domains addition

The complexity of the *Minkowski* sum calculation grows in exponential manner with the number of added domains. A new representation method of the convex polytopes has thus been developed in the aim to simplify this operation.

### VI.1.a List of the border hyper-planes

The first step consists in identifying all hyper-planes that could be part of the *H-representation* of the *Minkowski* sum domain. These hyper-planes are registered in a list that we named "list *B*".

Each border hyper-planes is defined by two independent features :

- A normal vector  $\vec{n}_{h_i}$
- and a scalar  $c_i$  which sets the position of the hyper-plane along his normal.

$$H_i : c_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot x_j \quad (4.1)$$

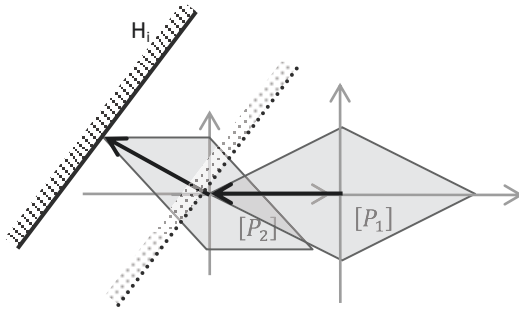
Avec :  $\left| \begin{array}{l} a_{i,j} \text{ coordinates of the normal vector } \vec{n}_{h_i}. \\ x_j \text{ coordinates of a point of the hyper-plan.} \end{array} \right.$

*Comment* : The scalar  $c_i$  is the sensitive coefficient of the hyper-plane associated to the border hyper-plane  $H_i$  on the considered domain.

The list *B* is composed by all normal vector. Thus, each convex polytope  $[P]$  can be defined by the column matrix of the sensitive coefficients of each border hyper-plane of the list *B*, on the represented domain  $[P]$ .

### VI.1.b *Minkowski* sum

That is a elementary functional requirement  $H_i$ . According to its definition, the sensitive coefficient  $c_i$  of the domain  $[D]$ , sum of several convex polytopes  $[P_j]$ , on the condition  $H_i$  is the sum of sensitive coefficient  $c_{ij}$  of these convex polytopes  $[P_j]$  on the condition  $H_i$  (eqn. 4.2).



$$c_i = \sum_j c_{ij} \quad (4.2)$$

Fig. 4.2 – Illustration of the sensitive coefficient  $c_i$  of the sum of polytopes  $[P_1]$  and  $[P_2]$  on the condition  $H_i$

Thus, the column matrix  $D$  representing the domain  $[D]$  *Minkowski* sum of several convex polytopes  $[P_i]$  is obtained by a simple addition of the column matrix  $P_j$  representing the added convex polytopes  $[P_j]$  (eqn. 4.3).

$$[D] = \sum_j [P_j] \quad \Longleftrightarrow \quad D = \sum_j P_j \quad (4.3)$$

## VI.2 Intersections of domains

The second operation used in the problem of tolerances analysis of mechanisms with parallel links, is the intersection of domains.

Thanks to the original representation of intersected domain, the calculation method of the intersection is simplified.

### ◊ Evaluation of the intersected domain with the new representation :

With the new representation of domains, each intersected convex polytope  $[P_i]$  is represented by a column matrix  $P_i$  which components correspond to the second member of the equations of the listed hyper-planes of border hyper-planes associated. For each border hyper-plane, just the one which has the lower second member (in the all group of intersected polytopes) is enough to obtain a definition of the intersected convex polytope. Thus, we obtain a column matrix  $P_{min}$  of minimal coefficients.

However, this definition must contain some overabundant border hyper-planes that doesn't cross a domain vertex (fig. 4.3).

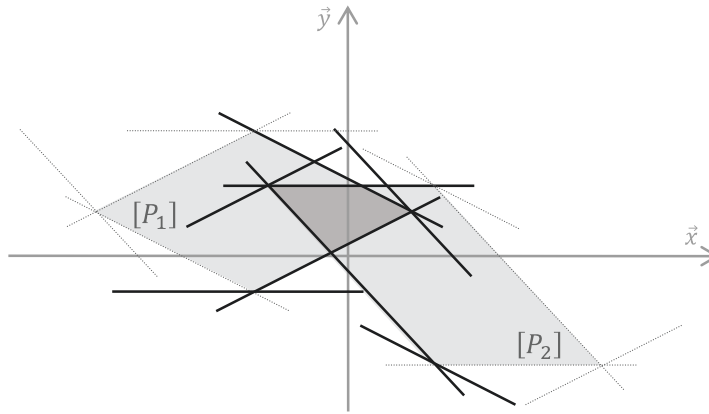


Fig. 4.3 – Example of intersection of two convex polytopes  $[P_1]$  and  $[P_2]$  defined by their new representation

To obtain a definition of the intersected domain in accordance with the new representation, allowing to be integrated in next calculations, we have to identify this overabundant constraints and evaluate again their sensitive coefficient.

## I Objectives

In this chapter, we are going to speak about the generic resolution of tolerancing problems applied on three-dimensional mechanisms composed by serial and parallel links. We have seen that the major part of assemblies can be described like the composition of these two major families of mechanisms. The use of methods developed to treat these two kinds of mechanism topology associated to the new representation of domain makes enable to define a systematic method of treatment of the main part of three-dimensional systems. We are going to describe this method with the help of the study of the double pin assembly example.

## II Tolerancing analysis of the hybrid mechanisms

### II.1 Topology

We name hybrid mechanisms, a system which connects a functional requirement to a reducible assembly graph [Giordano 09] composed by serial links and parallel links (fig. 5.1).

This kind of mechanisms represents the main part of manufactured products

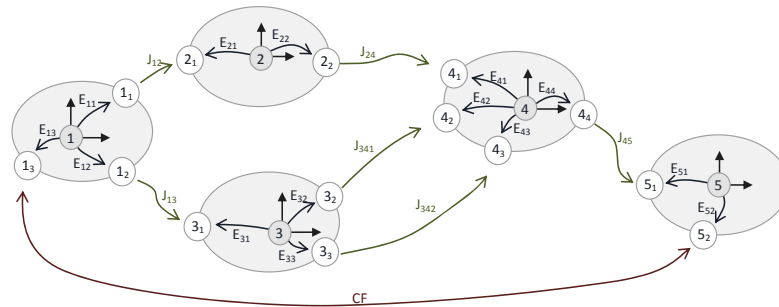


Fig. 5.1 – Example of assembly graph of a hybrid mechanism

An assembly graph is said reducible when it can be reduced to an elementary graph by successive reductions of serial and parallel links.

- The serial reduction consists in transforming a stack-up of parts (with clearances and deviations) in only one clearance and one deviation.
- In the same way, the parallel reduction consists in transforming a part assembly with parallel links in only one clearance and one deviation.



Is named "elementary graph" an assembly graph composed by 3 vertices connected by 3 edges : one functional requirement, one deviation and one clearance. During the successive reductions, the assembly graph is totally reshaped. The lines represent the equivalent clearances and deviations and delete the concept of part. During the calculation, the graphs are refined to just keep the needed vertices and edges.

The study of tolerancing of hybrid mechanisms needs the combined use of methods described previously.

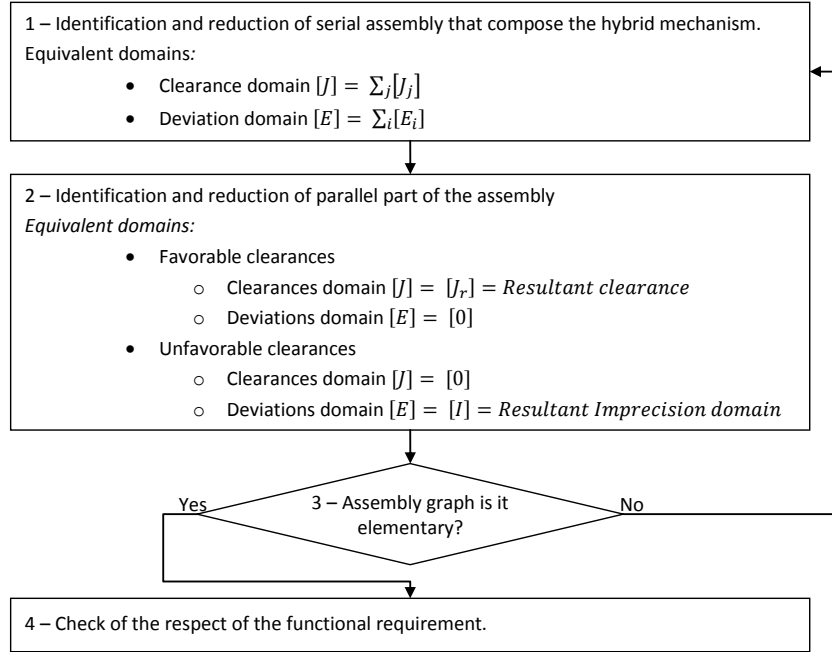


Fig. 5.2 – Reduction algorithm for assembly graph of hybrid mechanisms

## II.2 Resolution method

### II.2.a In worst case

The functional requirement is respected if and only if the domain calculated by *Minkowski* sum of domains of the elementary assembly is included in the functional requirement domain. According to the role of clearances, clearance domains can be added to the deviation domain (unfavorable clearances, accurate condition " $\forall$ ") or added to the functional requirement (favorable clearances, assembly feasibility condition " $\exists$ ").

## II.2.b Statistical study

This study is managed with the Monte-Carlo method. A batch of parts with clearances and deviations randomly generated. For each of this random sample, we reduce the assembly graph to simulate the assembly and control the respect of the functional requirement (fig. 5.2).

The assembly is possible if for each reduction of parallel graph, the equivalent clearances or deviations domain, calculated by a intersection operation, exists.

The functional requirement, is respected if the equivalent deviations domain respects the inclusion condition in the functional requirement domain. These inclusion conditions depend on the clearance role in the assembly.

### ◇ General algorithm of statistical simulation

*For* for each sample

*For* for each parallel part of assembly

*For* for each assembly path "c"

1. Calculation of the stack-up deviation  $\vec{E}$  (sum of the deviations  $\vec{E}_i$  in the assembly path "c")
2. Calculation of the stack-up clearance domain (*Minkowski* sum of the clearances domain of the assembly path "c")
3. Moving of the stack-up clearances domain by the stack-up deviation  $\vec{E}$

*End For*

1. Calculation of the intersection domain of the all shifted clearances domain of the parallel part of the assembly.
2. *IF* : Unfavorable clearances ( $\forall$ )  
      $\rightarrow$  Intersection domain  $\equiv$  Deviation  
      $\Rightarrow$  equivalent domain = Border point of the intersection domain  
*Otherwise* : If favorable clearances ( $\exists$ )  
      $\rightarrow$  Intersection domain = equivalent clearance  
     *End If*

*End For*

Check of the respect of the functional requirement  $C_f$  by the mechanism reduced to a serial assembly with clearances topology.

*End For*

## II.2.c Results

A mechanism is conform when the assembly of its all parallel assembly parts is possible (intersection domains not null) and when the functional requirement is respected according to its geometric specification and according to the clearance role (incusion of the deviations domain in the functional requirement domain) (fig. 5.3).

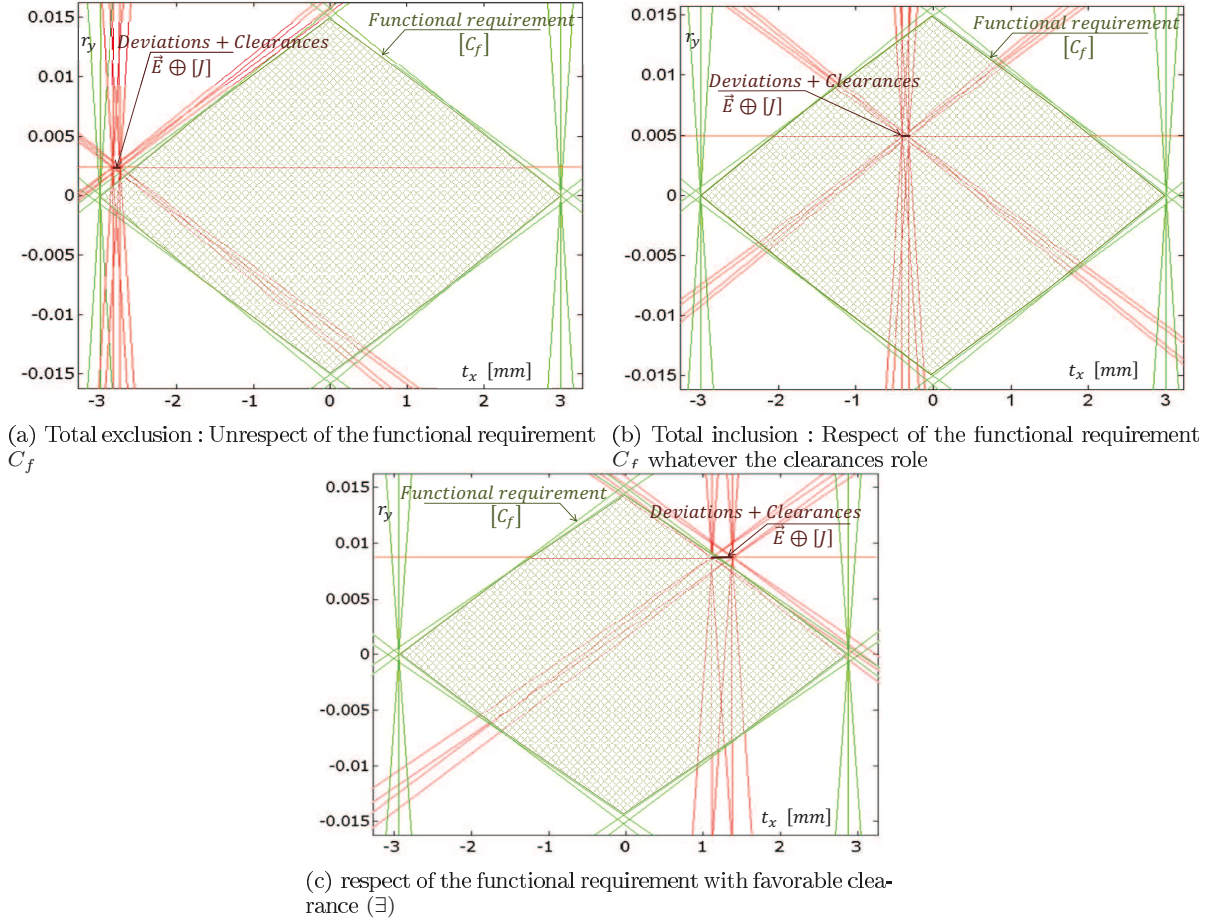


Fig. 5.3 – Conditions to respect the functional requirement  $C_f$

Our method is completely generic and can be applied on all kind of three-dimensional mechanisms that can be described as the composition of serial and parallel assembly. This topology represents the main part of manufactured products.

For each of these systems, the tolerancing analysis is automatically done and allows to optimize the value of the tolerance for a setting rate of no respect of the functional requirement. Only the "Wheastone bridge" (fig. 5.4) architecture, where there exists some intersection between links can not yet been treated. A specific calculation method will be developed to reduce this kind of assembly architecture.

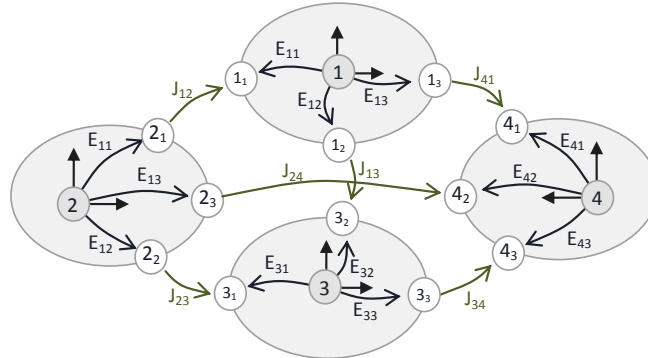


Fig. 5.4 – "Wheastone bridge" architecture

## Conclusions and outlooks

The functional tolerancing is an essential step in the life cycle of a manufactured product. A main part of its manufacturing costs are set during this design step.

Works presented on this thesis have mainly consisted in optimizing the "*domains*" tools for tolerancing modeling developed in the **SYMME** laboratory and to develop new calculation method adapted to this model. Indeed, the only study of the calculation method, quickly seems to be not enough. To discover new possibilities, we have needed to optimize simultaneously the model and the algorithms. Thus, each is adapted to the other and to the specific problem of tolerancing.

In the case of stack-up assembly, our calculation method allows to associate, for each link and contact surface, a sensitive coefficient independently of the qualitative tolerancing. Thus, we obtain a group of piecewise linear relation between the dimensional, geometric and functional tolerances. The treatment of these relations allows :

- to optimize the geometry by the minimization of the sensitive coefficients,
- to define the specification system which makes enable to obtain the larger tolerance intervals (qualitative tolerancing). By defining the surface which has higher sensitive coefficient as datum, its deviation are not directly sensitive and no tolerance are affected to it,
- to define the optimal tolerances repartition which make enable the respect in worst case of the functional requirement, in regards to a cost function defined previously.

In the case of an assembly with parallel links, the domains operations are not linear (intersection). It is not possible to obtain piecewise linear relations that needs the simultaneous treatment of qualitative and quantitative tolerancing. Thanks to our new representation of domains, it becomes possible to do the statistical simulation of the assembly of the main part of three-dimensional systems (all system which can be described like the composition of serial and parallel links) and thus to analyze their tolerancing.

However, this calculation method has been improved with the MatLab software. At present, the method is entirely programmed on the MatLab format. It is now necessary to continue this work, with the aim to develop a digital model independent and associated to CAD software. This should makes enable to deploy it in design engineering.

To this aim, some improvement will be planned :

- decreasing of the calculation time by significantly :
  - ▷ the optimization of the programming, which is, up to now, only developed in a experimental goal.
  - ▷ the integration of tools such as DualCone [Teissandier 11] for the generation of the new representation.
- The integration or the possible communication of the tolerancing analysis software with CAD system in the aim to collect the geometric data necessary for the automatic calculation of each kind of assembly.

In other hand, the analysis is today limited to the rigid part without shape defect. The model can be improved by :

- taking into account the elastics deviations due to strains in the links when they can be modeled [[Samper 03](#)],
- integrating deviation domains which model shape defects [[Adragna 10](#)].

With this new modeling tools, it becomes possible to find the multi-physics behavior of three-dimensional assembly [[Walter 12](#)]. Indeed, if instead of use randomly variables, each sample was composed by vertices of domains model (extremal variations), the sensitivity of each variable parameter on the respect of geometric requirement could be evaluated.

# Bibliographie



## Bibliographie

- [A. Shan 99] R. N. Roth A. Shan et R. J. Wilson. *A New Approach to Statistical Geometrical Tolerance Analysis*. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, vol. 15, page n°30, 1999.
- [Adragna 10] Pierre-Antoine Adragna, Serge Samper et Hugues Favrelière. *How form errors impact on 2D precision assembly with clearance ?* Precision Assembly Technologies and Systems, pages 50–59, 2010.
- [Ameta 07a] Gaurav Ameta, Joseph K Davidson et Jami J Shah. *Influence of Form on Frequency Distribution for 1-D Clearance Which is Generated from Tolerance-Maps*. In CIRP 2007, 2007.
- [Ameta 07b] Gaurav Ameta, Joseph K. Davidson et Jami J. Shah. *Tolerance-Maps Applied to a Point-Line Cluster of Features*. Journal of Mechanical Design, vol. 129, no. 8, pages 782–792, 2007.
- [Ameta 07c] Gaurav Ameta, Joseph K. Davidson et Jami J. Shah. *Using Tolerance-Maps to Generate Frequency Distributions of Clearance and Allocate Tolerances for Pin-Hole Assemblies*. Journal of Computing and Information Science in Engineering, vol. 7, no. 4, pages 347–359, 2007.
- [Ameta 10a] Gaurav Ameta, Joseph K. Davidson et Jami Shah. *Influence of form on Tolerance-Map-generated frequency distributions for 1D clearance in design*. Precision Engineering, vol. 34, no. 1, pages 22 – 27, 2010. CIRP-CAT 2007.
- [Ameta 10b] Gaurav Ameta, Joseph K. Davidson et Jami J. Shah. *Statistical Tolerance Allocation for Tab-Slot Assemblies Utilizing Tolerance-Maps*. Journal of Computing and Information Science in Engineering, vol. 10, no. 1, page 011005, 2010.
- [Ameta 11] G. Ameta, S. Serge et M. Giordano. *Comparison of Spatial Math Models for Tolerance Analysis : Tolerance-Maps, Deviation Domain, and TTRS*. ASME Transactions, Journal of Computing and Information Science in Engineering, vol. 11, no. 2, 2011.
- [Anselmetti 02] Bernard Anselmetti et Kwamivi Mawussi. *Tolérancement Fonctionnel d'un mécanisme : Identification de la boucle de contacts*. 2002.
- [Anselmetti 03a] B. Anselmetti, H. Mej bri et K. Mawussi. *Coupling experimental design-digital simulation of junctions for the development of complex tolerance chains*. Elsevier-Computers in industry, vol. 50, pages 277–292, 2003.
- [Anselmetti 03b] Bernard Anselmetti et Kwamivi Mawussi. *Computer Aided Tolerancing Using Positioning Features*. Journal of Computing and Information Science in Engineering, vol. 3, no. 1, pages 15–21, 2003.



- [Anselmetti 03c] Bernard Anselmetti et Mohammed Radouani. *Calcul statistique des chaînes de cotes avec distributions hétérogènes non indépendantes*. In Conception et Production Intégrées, pages 1–16, Meknès, 22, 23 & 24 octobre 2003.
- [Anselmetti 05] Bernard Anselmetti. *Génération automatique de la cotation fonctionnelle par la méthode CLIC*. 2005.
- [Anselmetti 06] Bernard Anselmetti. *Generation of functional tolerancing based on positioning features*. Computer-Aided Design, vol. 38, no. 8, pages 902 – 919, 2006.
- [Anselmetti 07] Bernard Anselmetti. *Calcul tridimensionnel de la résultante d’une chaîne de cotes en cotation ISO, en vue d’un calcul probabiliste*. Mécanique & Industries, vol. 8, no. 3, pages 173–185, may 2007.
- [Anselmetti 08a] Bernard Anselmetti. Manuel de tolérancement - volume 2 : Bases de la cotation fonctionnelle. Hermes Science Publications, 2008.
- [Anselmetti 08b] Bernard Anselmetti. Manuel de tolérancement - volume 3 : Cotation fonctionnelle tridimensionnelle. Hermes Science Publications, 2008.
- [Anselmetti 10a] Bernard Anselmetti. *CLIC : A method for geometrical specification of products*. Geometric Tolerancing of Products, pages 209–240, 2010.
- [Anselmetti 10b] Bernard Anselmetti, Robin Chavanne, Jian-Xin Yang et Nabil Anwer. *Quick GPS : A new CAT system for single-part tolerancing*. Computer-Aided Design, vol. 42, pages 768–780, 2010.
- [Armiliotta 07] A. Armiliotta et Q. Semeraro. *Tolerance specification through automated generation of assembly requirement*. Proceeding of 10th CIRP, International Conference on Computer-Aided-tolerancing, pages 11–24, 2007.
- [ASME-Y14.5 09] ASME-Y14.5. *Dimensioning and Tolerancing : Engineering Drawing and Related Documentation Practices*, 2009.
- [Ballot 95a] E. Ballot. *Lois de comportement géométrique des mécanismes pour le tolérancement*. Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1995.
- [Ballot 95b] E. Ballot et P. Bourdet. *Equations formelles et tridimensionnelles des chaînes de dimensions dans les mécanismes*. Actes du séminaire dur le tolérancement et chaîne de cotes, pages 97–109, 1995.
- [Ballot 97] E. Ballot et P. Bourdet. *A computation method for the consequences of geometric errors in mechanisms*. Proceeding of 5th CIRP, International Seminar on Computer-Aided-tolerancing, pages p137–p147, April 27-29 1997.
- [Ballu 93] Alex Ballu et Luc Mathieu. *Analysis of dimensional and geometrical specifications : standrads and models*. In 3rd CIRP Seminar on Computer-Aided Tolerancing, pages 157–170, 1993.
- [Ballu 99] Alex Ballu et Luc Mathieu. *Choice of functional specifications using graphs within the framework of education*. Proceeding of 6th CIRP, International Seminar on Computer-Aided-tolerancing, pages 197–206, 1999.
- [Ballu 01] Alex Ballu, Luc Mathieu et Jean-Yves Dantan. *Global View of geometrical specifications*. Proceeding of 7th CIRP, International Conference on Computer-Aided-tolerancing, 2001.
- [Ballu 06] A. Ballu, H. Falgarone, N. Chevassus et L. Mathieu. *A new design method based on functions and tolerances specifications for product modelling*. CIRP Annals - Manufacturing Technology, vol. 55, pages 139–142, 2006.
- [Ballu 07] A. Ballu, L. Mathieu et O. Legoff. Représentation des ensembles mécaniques et des spécifications par des graphes. Tolérancement géométrique des produits, 2007.
- [Bennis 97] F. Bennis, L. Pino et C. Fortin. *Transfert de tolérances géométrique pour la fabrication par une méthode algébrique*. Journal Européen des Systèmes Automatisés, vol. 31, pages 1339–1357, 1997.

- [Bennis 98] F. Bennis, L. Pino et C. Fortin. *Geometric tolerance transfer for manufacturing by an algebraic method*. Proceeding of 2nd IDMME Conference, pages 713–720, 1998.
- [Bhide 05] S. Bhide, G. Ameta et J.J. Shah J.K. Davidson. *Tolerance-Maps Applied to the Straightness and Orientation of an Axis*. In CIRP : Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing, pages 45 – 54, 10 - 12 April 2005.
- [Boukebbab 03] Salim Boukebbab, Jean-Marc Linares et Idriss Amara. *Simulation statistique des espaces de liberté en vue d'une expression mathématiques des zones de tolérance*. vol. 10, pages 1–13, Octobre 2003.
- [Bourdet 73] Bourdet. Chaîne de cotes de fabrication (méthode des delta 1). Numeéro 180. L'ingénieur et le Technicien de l'Enseignement Technique, 1973.
- [Bourdet 76] Pierre Bourdet et André Clément. *Controlling a complex surface with a 3 axis measuring machine*. Annals of the CIRP, vol. 25, page 359, 1976.
- [Bourdet 95a] P. Bourdet et E. Ballot. *Geometric Behavior Laws for Computer Aided Tolerancing*. Computer-Aided Tolerancing, pages 119–131, 1995.
- [Bourdet 95b] Pierre Bourdet, Luc Mathieu, Claire Lartigue et A. Ballu. *The concept of the small displacement torsor in metrology*. In Proceedings of international euroconference, Advanced mathematical tools in metrology, Oxford, 27-30 septembre 1995.
- [Bourdet 07] Pierre Bourdet, François Thiebault et Grégory CID. *Tolérancement Géométrie des Produits*. pages 137–159, April 2007.
- [Brissaud 11] Daniel Brissaud, Dinh Son Nguyen et Frédéric Vignat ;. *Taking into account geometrical variation effect on product performance*. International Journal of Product Lifecycle Management, vol. 5, no. 2-3, pages 102–121, October 2011.
- [BUI 11] Minh Hien BUI. *Identification et simulation des incertitudes de fabrication*. Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, 2011.
- [Chase 91] Kenneth W Chase et Alan R Parkinson. *A survey of research in the application of tolerance analysis to the design of mechanical assemblies*. Research in Engineering Design, vol. 3, pages 23–37, 1991. 10.1007/BF01580066.
- [Chase 96] K. W. Chase, J. Gao, S. P. Magleby et C. D. Sorenson. *Including Geometric Feature Variations in Tolerance Analysis of Mechanical Assemblies*. IIE Transactions, vol. 28, pages 795–807, 1996.
- [Chavanne 09a] Robin Chavanne et Bernard Anselmetti. *Chaîne de cotes 3D : Application de la méthode des droites d'analyse à une liaison prismatique*. 11ème Colloque National PRIMECA, 22 - 24 Avril 2009.
- [Chavanne 09b] Robin Chavanne et Bernard Anselmetti. *QUICK GPS : Rapid Tolerancing of an isolated part*. 2009.
- [Chavanne 11a] Robin Chavanne. *Contribution Au Tolérancement Fonctionnel 3D Des Mécanismes Complexes : Synthèse Des Spécifications Et Analyse De Tolérancement*. Thèse de Doctorat, ENS de Cachan / EA 1385 / Université de Paris Sud 11, Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée, 6 Juillet 2011.
- [Chavanne 11b] Robin Chavanne et Bernard Anselmetti. *Functional tolerancing : Virtual material condition on complex junctions*. Computers in Industry, 2011.
- [Clasen 09] Patrick J Clasen, Joseph K Davidson et Jami J Shah. *Modeling of geometric variations within a tolerance-zone for circular runout*. In ASME 2009 : International Design Engineering Technical Conference & Computers and Information in engineering Conference, San Diego, California, USA, August 30 - September 2, 2009 2009.
- [Clement 88] A. Clement et P. Bourdet. *A Study of Optimal-Criteria Identification Based on the Small-Displacement Screw Model*. CIRP Annals - Manufacturing Technology, vol. 37, no. 1, pages 503 – 506, 1988.

- [Clément 91] A. Clément, A. Desrochers et A. Riviere. *Theory and Practice of 3D Tolerancing for assembly*. In 2th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing, pages 25–56, Penn State, USA, 1991.
- [Clément 94] A. Clément, A. Rivière et M. Temmerman. Cotation tridimensionnelle des systèmes mécaniques, volume Théorie et pratique. Théorie et pratique, 1994.
- [Clément 97] A. Clément, C. Valade et A. Rivière. *The ttrs 13 orientad constraints for dimensionning, tolerancing and inspection*. Advanced Mathematical Tool in Metrology III, pages 24–42, 1997.
- [Clozel 07] Clozel et Rance. *MecaMaster : Un outil de simulation des assemblage dès la conception préliminaire, approche industrielle*. Dans Lavoisier, Edition : Tolérancement géométrique des produits, 2007.
- [Coxeter 69] H. Coxeter. Introduction to geometry. John Wiley & Sons, Inc., United States of America, 2nd edition, 1969.
- [Dantan 00] Jean-Yves Dantan. *Synthèse des spécifications géométriques : modélisation par Calibre à Mobilités Internes*. Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux, 2000.
- [Dantan 05] Jean-Yves Dantan, Luc Mathieu, Alex Ballu et Patrick Martin. *Tolerance synthesis : quantifier notion and virtual boundary*. Computer-Aided Design, vol. 37, no. 2, pages 231 – 240, 2005.
- [Dantan 08] Jean-Yves Dantan, Alex Ballu et Luc Mathieu. *Geometrical product specifications – model for product life cycle*. Computer-Aided Design, vol. 40, no. 4, pages 493 – 501, 2008.
- [Dantan 09] Jean-Yves Dantan et Ahmed-Jawad Qureshi. *Worst-case and statistical tolerance analysis based on quantified constraint satisfaction problems and Monte Carlo simulation*. Computer-Aided Design, vol. 41, no. 1, pages 1 – 12, 2009.
- [Davidson 02a] J Davidson et J Shah. *Geometric tolerances : a new application for line geometry and screws*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 216, no. 1, pages 95–103, January 2002.
- [Davidson 02b] J. K. Davidson, A. Mujezinovic et J. J. Shah. *A New Mathematical Model for Geometric Tolerances as Applied to Round Faces*. Journal of Mechanical Design, vol. 124, no. 4, pages 609–622, 2002.
- [Davidson 03] Joseph K Davidson et Jami J Shah. *Using Tolerance-Maps® to represent material condition on both a feature and a datum*. In CIRP2003, 2003.
- [Davidson 11] Joseph K. Davidson et Jami J. Shah. *Modling of Geometric Variations for Line-Profile*. In Proceedings if the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conference & Computers and Informations in Engineering Conference, Washington, D.C., USA, August 28 - 31 2011.
- [de Jaegher 11] Thibaut de Jaegher. *L'industrie contre l'agriculture*. Usine Nouvelle, vol. chronique : "machine arrière", 24 Septembre 2011.
- [Desrochers 03] A. Desrochers. *A CAD/CAM representation model applied to tolerance transfer methods*. Journal of Mechanical Design, vol. 125, 2003.
- [Dufailly 07] Jacques Dufailly et Michel Poss. Manuel de formation : Norme iso tolérancement gps. Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2007.
- [Duret 93] Daniel Duret et Max Giordano. *Clearance Space and Deviation Space. Application to three-dimensional chain of dimensions and positions*. In Eyrolles, editeur, Proceedings of 3rd CIRP Seminars on Computer Aided Tolerancing - Tolérancement Géométrique, pages 179–196, Ecole Normale Supérieure de Cachan, April 27-28 1993.
- [Evans 75] D. H. Evans. *Statistical Tolerancing : The state of the art*. Journal of Quality Technology, vol. 7, page n°1, 1975.

- [Falgarone 06] H. Falgarone et N. Chevassus. *Assembly modelling, design through interfaces, assembly process analysis, change management, systems engineering, computer aided design*. In CIRP Design, Cairo, Egypt, 2006.
- [Favrelière 09] Hugues Favrelière. *Tolérancement Modal : De la Métrologie vers les Spécifications*. Thèse de Doctorat, Université de Savoie, 2009.
- [Franciosa 09] P. Franciosa, S. Gerbino et S. Patalano. *Modelling and Simulation of Assembly Constraints in Tolerance Analysis of Rigid Part Assemblies*. In 11th CIRP-CAT Conference on Computer Aided Tolerancing, Université de Savoie, Annecy-France, 26-27 mars, 2009.
- [Fukuda 96] K. Fukuda et A. Prodon. *Double description method revisited*. Combinatorics and Computer Science, vol. 1120 of Lecture Notes in Computer Science, pages 91–111, 1996.
- [Fukuda 00] K. Fukuda. Frequently asked questions in polyhedral computation. Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, 2000.
- [Fukuda 04] Komei Fukuda. *From the zonotope construction to the Minkowski addition of convex polytopes*. Journal of Symbolic Computation, vol. 38, no. 4, pages 1261 – 1272, 2004. Symbolic Computation in Algebra and Geometry.
- [Gaunet 93] D. Gaunet. *Vectorial tolerancing model*. Proceeding of 3th CIRP Seminar on Computer-Aided-tolerancing, 1993.
- [Gaunet 94] D. Gaunet. *Modèle formel de tolérancement de position. Contributions à l'aide au tolérancement des mécanisme en CFAO*. Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieur de Cachan, 1994.
- [Gaunet 01] D. Gaunet. *Geometric product specification*. 3D functional tolerancing and annotation : CATIA tools for geometrical product specification, 2001.
- [Germain 07] Frédéric Germain. *Tolérancement statistique tridimensionnel, intégration en CFAO*. Thèse de Doctorat, Université de Savoie, 2007.
- [Ghie 05] W. Ghie, L. Laperrière et A. Desrochers. *Re-Design of Mechanical Assemblies using the Unified Jacobian-Torsor Model for Tolerance Analysis*. Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing, pages 95 – 104, 10-12 April 2005.
- [Giordano ] Max Giordano et Eric Pairel. *Un modèle formel de tolérancement : Les zones de tolérances liées*.
- [Giordano 87] Max Giordano. *Methods for a dynamic model of a robot with a complex kinematic chain*. Automatique-productique informatique industrielle, vol. 21, no. 2, pages 151–173, 1987.
- [Giordano 99] Max Giordano, Eric Pairel et Serge Samper. *Mathematical representation of Tolerance Zones*. In 6th CIRP International Seminar on Computer Aided Tolerancing, Enschede, The Netherlands, March 1999.
- [Giordano 03a] Max Giordano, Bassam Kataya et Eric Pairel. *Tolerance analysis and synthesis by means of clearance and deviation spaces*. Kluwer academic publishers, 2003.
- [Giordano 03b] Max Giordano, Serge Samper et Eric Pairel. *Paramétrages et tolérances géométriques*. In 3ème Conférence Internationale Conception et Production Intégrées, ENSAM Meknès, Maroc, 22-24 oct 2003.
- [Giordano 05] Max Giordano, Eric Pairel et Pascal Hernandez. *Complex Mechanical Structure Tolerancing by Means of Hyper-graphs*. Proceeding of 9th CIRP, International Conference on Computer-Aided-tolerancing, held at Arizona State University, Tempe, Arizona, USA, pages 105–114, 10-12 April 2005.
- [Giordano 07] Max Giordano, Serge Samper et Jean-Philippe Petit. *Tolerance Analysis and Synthesis by means of Deviation Domains, Axis-symmetric Cases*. Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing, pages 85–94, April 2007.

- [Giordano 09] Max Giordano, Pascal Hernandez et Dimitri Denimal. *Synthesis and analysis for three-dimensional tolerancing*. In 11th CIRP International Conference On Computer Aided Tolerancing, Geometric Variations Within Product Life-Cycle Management,, Annecy : France, 2009.
- [Glancy 99] Charles G. Glancy et Kenneth W. Chase. *A Second-Order Methode For Assembly Tolerance Analysis*. In Proceedings of the 1999 ASME Design Engineering Technical Conferences, Las Vegas, Nevada, September 12-15, 1999 1999.
- [Guilford 93] J.D. Guilford et J.U. Turner. *Advanced tolerance analysis and synthesis for geometric tolerances*. Proceeding of International Forum on Dimensial Toleranciong and Metrology, CRTD, vol. 27, pages 187–198, 1993.
- [Hoecke 12] Alain Van Hoecke. *Hierarchization of characteristics applied to the component approval strategy*. In 12th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Huddersfield, UK, 18th - 19th April 2012.
- [ISO-8015 85] ISO-8015. *Dessin technique - Principe du tolérancement de base*, 1985.
- [ISO-DIS-14405-2 11] ISO-DIS-14405-2. *Spécification géométrique des produits (GPS) - Tolérancement dimensionnel - Part 2 : dimensions autres que les tailles linéaires*, 2011.
- [ISO-TS-17450-1 05] ISO-TS-17450-1. *Geometric Product Specification - General concept - Part 1 : Model for geometrical specification and verification*, 2005.
- [Jayaraman 89] R. Jayaraman et V. Srinivasan. *Geometric Tolerancing : 1. Virutal Boundary Requirement*. IBM Journal of Research and Development, vol. 33 (2), pages 90–104, 1989.
- [Jian 01] A. D. Jian. The Tolerance-Map<sup>®</sup> and its application to one stack up in a power saw. Master’s thesis, Arizone State University, 2001.
- [Jian 05] A. D. Jian, G. Ameta, J. K. Davidson et J. J. Shah. *Tolerance Analysis and Allocation Using Tolerance-Maps for a Power Saw Assembly*. In CIRP : Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing, pages 267 – 276, 10 - 12 april 2005.
- [Kamali-Nejad 09] M. Kamali-Nejad, F. Vignat et F. Villeneuve. *Simulation of the Geometrical Defects of Manufacturing*. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, vol. 45/7, no. 7-8, pages 631–648, 2009.
- [Laperriere 02] L. Laperriere, W. Ghie et A. Desrochers. *Statistical and Deterministic Tolerance Analysis and Synthesis Using a Unified Jacobian-Torsor Model*. CIRP Annals - Manufacturing Technology, vol. 51, no. 1, pages 417 – 420, 2002.
- [Laperrière 00] Luc Laperrière et Hoda A. ElMaraghy. *Tolerance Analysis and Synthesis Using Jacobian Transforms*. CIRP-Annals, vol. 49, pages 359–362, 2000.
- [Legrais 05] Gaëtan Legrais. *Integration d’un outil d’aide au tolérancement dans un logiciel de C.F.A.O.* Thèse de Doctorat, Ecole Supérieure d’Ingénieurs d’Annecy - Université de Savoie, 2005.
- [Leonard 12] Pierric Leonard, Eric Pairel et Max Giordano. *A simple and more formal geometric tolerancing model*. In 12th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Huddersfield, UK, 18th - 19th April 2012.
- [Löf 05] J. Löf, T. Hermansson et R. Söderberg. *An Efficient Solution to the Discrete Least-Cost Tolerance Allocation Problem with General Loss Function*. Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing, pages 115–124, 10-12 April 2005.
- [Linares 93] J-M Linares et C. Marty. *Tolerancing by functional group*. Proceeding of 3th CIRP seminar on Computer-Aided-tolerancing, pages 267–277, 1993.
- [Mansuy 11] Mathieu Mansuy, Max Giordano et Pascal Hernandez. *A New Calculation Method for the Worst Case Tolerance Analysis and Synthesis in Stack-Type Assemblies*. Computer-Aided Design, vol. 43, pages 1118–1125, 2011.

- [Marguet 01] B. Marguet. *Contribution à l'analyse des variations géométriques dans les ensembles structuraux en aéronautique : Démarche et outils*. Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2001.
- [Mathieu 03] Luc Mathieu et Alex Ballu. *GeoSpelling : a common language for specification and verification to express method uncertainty*. Proceedings of 8th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing, 2003.
- [Mathieu 07a] L. Mathieu et A. Ballu. *A Model for a Coherent and Complete Tolerancing Process*. pages 35–44, 2007. 10.1007/1-4020-5438-6\_5.
- [Mathieu 07b] Luc Mathieu. Contribution à la maîtrise des variations géométriques des produits le long de leur cycle de vie. Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches, LURPA, 2007.
- [Mejbri 04] Hédi Mejbri. *Contribution au développement d'une méthode de cotation fonctionnelle des mécanismes complexes*. Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2004.
- [Mejbri 05] H. Mejbri, B. Anselmetti et K. Mawussi. *Functional tolerancing of complex mechanisms : Identification and specification of key parts*. Computers & Industrial Engineering, vol. 49, no. 2, pages 241 – 265, 2005.
- [Mounaud 09] Mathieu Mounaud. *Contribution à l'analyse des défauts géométrique dans le routage d'un réseau hydraulique en aéronautique : Incidences sur la conception*. Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Juillet 2009.
- [Mujezinovic 01] A. Mujezinovic, J.K. Davidson et J.J. Shah. *A New Mathematical Model for Geometric Tolerances as Applied to Rectangular Faces*. In Proceedings of the 2001 Design engineering Technical Conferences, Pittsburg, Pensilvania Sept 9-12, 2001.
- [Mujezinovic 04] A. Mujezinovic, J. K. Davidson et J. J. Shah. *A New Mathematical Model for Geometric Tolerances as Applied to Polygonal Faces*. Journal of Mechanical Design, vol. 126, no. 3, pages 504–518, May 2004.
- [NF-EN-ISO-1101 06] NF-EN-ISO-1101. *Geometrical Product Specifications (GPS) - Geometrical tolerancing - Tolerances of form, orientation, location and run-out*, 2006.
- [NF-EN-ISO-2692 07] NF-EN-ISO-2692. *Spécification Géométrique des Produits (GPS) - Tolérancement géométrique - Exigence au maximum de matière (MMR), exigence du minimum de matière (LMR) et exigence de réciprocité*, 2007.
- [NF-EN-ISO-5459 04] NF-EN-ISO-5459. *Spécification Géométrique des Produits (GPS) - Tolérancement Géométrique - Références Spécifiées et Systèmes de Références Spécifiées*, 2004.
- [Nigam 95] Swami D Nigam et Joshua U Turner. *Review of statistical approaches to tolerance analysis*. Computer-Aided Design, vol. 27, pages 6–15, 1995.
- [Pairel 01] Eric Pairel et Max Giordano. *Qualité géométrique des produits*. In Qualita 2001 - 4ème congrès Pluridisciplinaire Qualité et sûreté de fonctionnement, 2001.
- [Pairel 05] Eric Pairel, Pascal Hernandez et Max Giordano. *Représentation par calibres virtuels des tolérances géométriques dans les systèmes de CFAO*. In J.K. Davidson, éditeur, Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing, 2005.
- [Pairel 07] Eric Pairel. *For a rewriting of geometric tolerancing language*. Proceeding of 10th CIRP, International Conference on Computer-Aided-tolerancing, 2007.
- [Petit 04] Jean-Philippe Petit. *Spécification géométrique des produits : Methode d'analyse de tolérancement application en Conception Assistée par Ordinateur*. Thèse de Doctorat, Ecole Supérieurs d'Ingénieurs d'Annecy, 2004.
- [Pino 00] Laurent Pino. *Modélisation et analyse cinématique des tolérances géométriques pour l'assemblage de systèmes mécaniques*. Thèse de Doctorat, Ecole Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur de Nantes, 2000.

- [Requicha 77] A.A.G. Requicha. *Part and assembly description language : 1 - Dimensioning and Tolerancing*. Production Automation Project, vol. TM-19, 1977.
- [Requicha 83] A.A.G. Requicha. *Toward a Theory of Geometric Tolerancing*. The International Journal of Robotics Research, pages 45–60, 1983.
- [Rivest 93] L. Rivest, C. Fortin et A. Desrochers. *Tolerance for 3D analysis : presenting a kinematic formulation*. 3rd CIRP Seminar on Computer-Aided Tolerancing, pages 51–74, 1993.
- [Rivest 94a] L. Rivest, E. Dupernet, C. Fortin et C. Morel. *Analysis of product tolerances for process plan validation*. Manufacturing review, vol. 7, pages 312–331, 1994.
- [Rivest 94b] L. Rivest, C. Fortin et C. Morel. *Tolerancing a solid model with a kinematic formulation*. Computer-Aided Design, vol. 26, pages 465–476, 1994.
- [Robinson 97] D. Robinson. *Geometric tolerancing for assembly*. Proceeding of 5th CIRP Seminar on Computer-Aided-tolerancing, 1997.
- [Robinson 98] D. Robinson. *Geometric tolerancing for assembly*. Thèse de Doctorat, Cornell University, 1998.
- [Sacks 97] E. Sacks et L. Joskowicz. *Parametric Kinematic Tolerance Analysis of Planar Mechanisms*. Computer-Aided Design, vol. 29, pages 333–342, 1997.
- [Salomons 96a] O.W. Salomons, F.J. Haalboom, H.J. Jonge Poerink, F. Van Slooten, F.J.A.M. Van Houten et H.J.J. Kals. *A computer aided tolerancing tool II : Tolerance analysis*. Computers in industry, vol. 31, pages 175–186, 2 November 1996.
- [Salomons 96b] O.W. Salomons, H.J. Jong Poerink, F.J. Haalboom, F.J.A.M. Van Houten et H.J.J. Kals. *A computer aided tolerancing tool I : Tolerance specification*. Computers in industry, vol. 32, pages 161–174, 1 November 1996.
- [Samper 03] Serge Samper et Max Giordano. *Simultaneous analysis method for tolerancing flexible mechanisms*. Kluwer academic publishers, 2003.
- [Samper 07] Serge Samper. *Tolérancement et analyse des structures au service des systèmes souples et du défaut de forme*. Université de Savoie, 2007.
- [Sellakh 00] R. Sellakh, E. Sellem et A. Riviere. *Specification et simulation des imperfections géométriques en CFAO*. Mec. Ind., pages 365–372, 2000.
- [Shah 07] J. J. Shah, G. Ameta, Z. Shen et J. K. Davidson. *Navigating the Tolerance Analysis Maze*. Computer-Aided Design & Application, vol. 4, no. 5, pages 705–718, 2007.
- [Singh 09] Gagandeep Singh, Gaurav Ameta, Joseph K. Davidson et Jami J. Shah. *Worst-Case Tolerance Analysis of a Self-Aligning Coupling Assembly using Tolerance-Maps*. In F. Villeneuve et M. Giordano, éditeurs, In CD-rom Proc, 11th CIRP Int’l Conference on CAT, Annecy, France, March 26-27 2009.
- [Socoliuc 10] Michel Socoliuc. *Modélisation de l’influence des schémas de tolérancement dans les liaisons mécaniques, méthode d’assistance pour la validation des spécifications fonctionnelles et l’optimisation du dimensionnement*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris, 2010.
- [Srinivasan 93] V. Srinivasan. *Role of sweeps in tolerancing semantics*. In Forum on Dimensional Tolerancing and Metrology, volume 27, pages 67–78, 1993.
- [Teissandier 97] D. Teissandier, Y. Couetard et A. Gerard. *Three-dimensional functional tolerancing with proportional assembly clearance domain volum (UPEL) : Application to setup planning*. Proceeding of 5th CIRP seminar on Computer-Aided-tolerancing, pages 113–123, 1997.
- [Teissandier 99a] D. Teissandier, Y. Couétard et A. Gérard. *A computer aided tolerancing model : proportioned assembly clearance volume*. Computer-Aided Design, vol. 31, pages 807–817, 1999.

- [Teissandier 99b] D. Teissandier, V. Delos et Y. Couetard. *Operations on polytopes : Application to tolerance analysis*. In Global consistency of tolerances : proceedings of the 6th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing, Enschede (The Netherlands), 1999.
- [Teissandier 11] D. Teissandier et V. Delos. *Algorithme to calculate the Minkowski sums of 3-polytopes based on normal fans*. Computer-Aided Design, vol. 43, pages 1567–1576, 2011.
- [Thiebault 01] François Thiebault. *Contribution à la définition d'un moyen unifié de gestion de la géométrie réaliste basé sur le calcul des lois de comportement des mécanismes*. Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Décembre 2001.
- [Turner 87] J.U. Turner. *Tolerances in Computer-Aided Geometric Design*. Thèse de Doctorat, Rensselaer Polytechnic Institute, 1987.
- [Turner 93] J.U. Turner. *A feasibility space approach for automated tolerancing*. Journal of Engineering for Industry, vol. 115, pages 341–346, 1993.
- [Walter 12] M. Walter et S. Wartzack. *Analysis of the effects of manufacturing-caused deviations and varying operation parameters on operation-depending deviations of systems in motion*. In 12th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Huddersfield, UK, 18th - 19th April 2012.
- [Whitney 94] D. Whitney, O. Gilbert et M. Jastrzebski. *Representation of Geometric Variations Using Matrix Transforms for Statistical Tolerance Analysis in Assembly*. Research in Engineering Design, vol. 6, pages 191–210, 1994.
- [Wirtz 89] A. Wirtz. *Vectorial tolerancing*. Proceeding of CIRP Seminar on CAD/CAM, 1989.
- [Wirtz 91] A. Wirtz. *Vectorial tolerancing for production quality control and functional analysis in design*. Annals of the CIRP, 1991.
- [Wirtz 93] A. Wirtz. *Vectorial Tolerancing. A basic element for quality control*. Proceeding of 3th CIRP, International Conference on Computer-Aided-tolerancing, pages 115–227, 1993.
- [Wu 03] Yanyan Wu, Jami J. Shah et Joseph K. Davidson. *Improvements to algorithms for computing the Minkowski sum of 3-polytopes*. Computer-Aided Design, vol. 35, no. 13, pages 1181 – 1192, 2003.



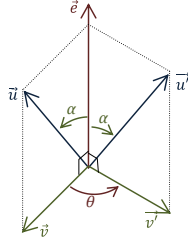


# Annexes



## Définition de la matrice rotation $R(\vec{e}, \Theta)$

On passe d'un repère (0) à un repère (1) par rotation d'angle  $\Theta$  autour d'un vecteur quelconque unitaire  $\vec{e}$  de composantes  $(e_x, e_y, e_z)$  dans (0) (fig. A.1).



- Soit  $\vec{u}$  un vecteur quelconque se transformant en vecteur  $\vec{u}'$  par la rotation  $R(\vec{e}, \Theta)$  précédemment définie.
- Soit  $\vec{v}$  un vecteur du plan  $(\vec{u}, \vec{e})$  tel que  $\vec{v} \wedge \vec{e} = 0$ . Ce vecteur devient  $\vec{v}'$  par la rotation  $R(\vec{e}, \Theta)$ .
- Soit  $\vec{\omega}$  tel que  $\vec{\omega} = \vec{e} \wedge \vec{v}$

Fig. A.1 – Rotation autour d'un vecteur  $\vec{e}$  quelconque

On peut donc écrire les vecteurs  $\vec{u}'$  et  $\vec{v}'$  obtenus par la rotation  $R(\vec{e}, \Theta)$  des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  comme suit (eqn. A.1) :

$$\begin{cases} \vec{u}' = \cos(\alpha) * \vec{e} + \sin(\alpha) * \vec{v}' \\ \vec{v}' = \cos(\theta) * \vec{v} + \sin(\theta) * \vec{\omega} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Si on exprime  $\vec{u}'$  en fonction de  $\vec{e}$  et de  $\vec{u}$  on obtient (eqn. A.2) :

$$\begin{aligned} \vec{u}' &= \cos(\alpha) * \vec{e} + \sin(\alpha) * (\cos(\theta) * \vec{v} + \sin(\theta) * \vec{\omega}) \\ \rightarrow \vec{u}' &= \cos(\alpha) * \vec{e} + \sin(\alpha) * \left( \cos(\theta) * \frac{\vec{u} - \cos(\alpha) * \vec{e}}{\sin(\alpha)} + \sin(\theta) * \vec{e} \wedge \left( \frac{\vec{u} - \cos(\alpha) * \vec{e}}{\sin(\alpha)} \right) \right) \\ \rightarrow \vec{u}' &= \vec{e} * \cos(\alpha) * (1 - \cos(\theta)) + \vec{u} * \cos(\theta) + \vec{e} \wedge \vec{u} * \sin(\theta) - \vec{e} \wedge \vec{e} * \sin(\theta) * \cos(\alpha) \\ \Rightarrow \vec{u}' &= \vec{e} * (\vec{e} * \vec{u}) * (1 - \cos(\theta)) + \vec{u} * \cos(\theta) + \vec{e} \wedge \vec{u} * \sin(\theta) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

D'où, si on écrit la rotation  $R(\vec{e}, \Theta)$  sous forme matricielle, on obtient (eqn. A.3) :

$$R(\vec{e}, \Theta) = (1 - \cos(\theta)) * \begin{bmatrix} e_x^2 & e_x * e_y & e_x * e_z \\ e_x * e_y & e_y^2 & e_y * e_z \\ e_x * e_z & e_y * e_z & e_z^2 \end{bmatrix} + \cos(\theta) * I + \sin(\theta) * \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$



## Champs de déplacements des points appartenant à un solide rigide en mouvement dans un référentiel donné

Soit un solide rigide  $S$  en mouvement dans un référentiel donné entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ . Son déplacement est caractérisé par une transformation linéaire composée d'une translation et d'une rotation. Sa position à l'instant  $t_0$  est définie par le repère  $R_0 = (O_0, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ . De même, sa position à l'instant  $t_1$  est définie par le repère  $R_1 = (O_1, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$  (fig. B.1).

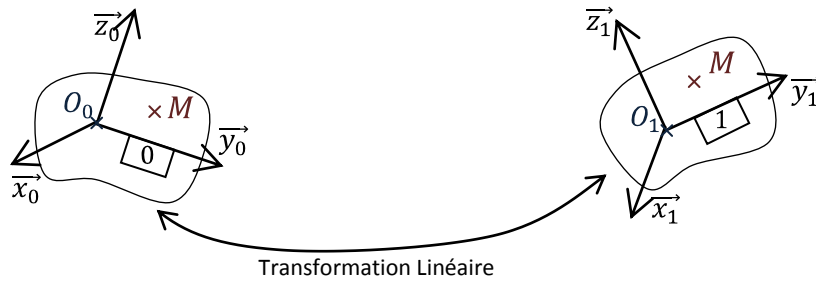


Fig. B.1 – Déplacement d'un point  $M$  quelconque appartenant à un solide  $S$  indéformable

Le vecteur déplacement d'un point quelconque  $M$  appartenant au solide  $S$  supposé rigide entre les instants  $t_0$  et  $t_1$  est noté :

$$\delta(\vec{M}) = \vec{M}_0 \vec{M}_1 \quad (\text{B.1})$$

Par la relation de Chasles, on obtient :

$$\vec{M}_0 \vec{M}_1 = \vec{M}_0 \vec{O}_0 + \vec{O}_0 \vec{O}_1 + \vec{O}_1 \vec{M}_1 \quad (\text{B.2})$$

D'où, d'après les notations de l'équation (B.1) :

$$\delta(\vec{M}) = -\vec{O}_0 \vec{M}_0 + \delta(\vec{O}) + \vec{O}_1 \vec{M}_1 \quad (\text{B.3})$$

Cette relation est vraie quelle que soit la base de projection choisie. Soit  $\underline{\underline{R_{01}}}$  la matrice de passage de la base  $b_1$  associée au repère  $R_1$  à la base  $b_0$  associée au repère  $R_0$ .

$$\vec{v} \Big|_{b_0} = \underline{\underline{R_{01}}} \cdot \vec{v} \Big|_{b_1} \quad (\text{B.4})$$

On obtient,

$$O_1 \vec{M}_1 \Big|_{b_0} = \underline{\underline{R_{01}}} \cdot O_1 \vec{M}_1 \Big|_{b_1} \quad (\text{B.5})$$

Le solide S étant supposé indéformable, la relation suivante est toujours vraie :

$$O_1 \vec{M}_1 \Big|_{b_1} = O_0 \vec{M}_0 \Big|_{b_0} \quad (\text{B.6})$$

Donc :

$$O_1 \vec{M}_1 \Big|_{b_0} = \underline{\underline{R_{01}}} \cdot O_0 \vec{M}_0 \Big|_{b_0} \quad (\text{B.7})$$

En reportant cette relation dans l'équation (B.3), le déplacement de M peut s'écrire sous la forme :

$$\delta(\vec{M}) \Big|_{b_0} = \delta(\vec{O}) \Big|_{b_0} + \underline{\underline{R_{01}}} \cdot O_0 \vec{M}_0 \Big|_{b_0} - O_0 \vec{M}_0 \Big|_{b_0} \quad (\text{B.8})$$

Soit sous sa forme simplifiée

$$\delta(\vec{M}) \Big|_{b_0} = \delta(\vec{O}) \Big|_{b_0} + (\underline{\underline{R_{01}}} - \underline{\underline{I_3}}) \cdot O_0 \vec{M}_0 \Big|_{b_0} \quad (\text{B.9})$$

Avec  $\underline{\underline{I_3}}$  la matrice identité dans  $\mathbb{R}^3$  et  $R_{01}$  la matrice de passage caractérisant la rotation du repère  $R_1$  par rapport au repère  $R_0$ .

Le champ de déplacement du solide S peut donc être exprimé comme la combinaison :

- d'une *translation* modélisée par le vecteur  $\vec{\delta}_{01}$  représentant la position de l'origine du repère  $R_1$  dans le repère  $R_0$ .
- d'une *rotation* modélisée par la matrice  $R_{01}$  représentant les coordonnées de la base  $b_1$ , associée au repère  $R_1$ , dans la base  $b_0$ , associée au repère  $R_0$ .

Dans le cas général, la rotation peut être définie par les 3 angles de Bryant :

- Un angle  $\lambda$ , autour de l'axe  $\vec{x}_0$ .
- Un angle  $\mu$ , autour de l'axe  $\vec{y}_0$ .
- Un angle  $\nu$ , autour de l'axe  $\vec{z}_0$ .

$$(0) \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{x}_0, \lambda)} (a) \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{y}_0, \mu)} (b) \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{z}_0, \nu)} (1)$$

La rotation globale est composée de ces 3 rotations successives. Elle peut donc s'écrire sous la forme du produit matriciel des 3 matrices de rotation associées aux angles de Bryant  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$  suivant :

$$\underline{\underline{R_{01}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \\ 0 & \sin(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\mu) & 0 & \sin(\mu) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\mu) & 0 & \cos(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\nu) & -\sin(\nu) & 0 \\ \sin(\nu) & \cos(\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Soit :

$$\underline{\underline{R_{01}}} = \begin{pmatrix} \cos(\mu) \cdot \cos(\nu) & -\cos(\mu) \cdot \sin(\nu) & \sin(\mu) \\ \sin(\lambda) \cdot \sin(\mu) \cdot \cos(\nu) + \cos(\lambda) \cdot \sin(\nu) & -\sin(\lambda) \cdot \sin(\mu) \cdot \sin(\nu) + \cos(\lambda) \cdot \cos(\mu) & -\sin(\lambda) \cdot \cos(\mu) \\ -\cos(\lambda) \cdot \sin(\mu) \cdot \cos(\nu) + \sin(\lambda) \cdot \sin(\nu) & \cos(\lambda) \cdot \sin(\mu) \cdot \sin(\nu) + \sin(\lambda) \cdot \cos(\nu) & \cos(\lambda) \cdot \cos(\mu) \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

L'approximation des "petits déplacements" consiste à supposer que, les fonctions Cosinus et Sinus et leurs produits peuvent être approximés par leur développement limité au premier ordre.

La matrice rotation s'écrit alors :

$$\underline{\underline{R_{01}}} = \begin{pmatrix} 1 & -\nu & \mu \\ \nu & 1 & -\lambda \\ -\mu & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

En injectant ce résultat dans l'équation (B.9), on obtient l'égalité suivante :

$$(\underline{\underline{R_{01}}} - \underline{\underline{I_3}}) = \begin{pmatrix} 0 & -\nu & \mu \\ \nu & 0 & -\lambda \\ -\mu & \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Or le produit d'une matrice antisymétrique avec une matrice colonne est équivalent à un produit vectoriel. Le petit déplacement  $\vec{\delta}_M$  du point M se voit donc caractérisé par un vecteur translation  $\vec{\delta}_{O_0} = O_0 O_1$  et un vecteur rotation  $\vec{\Omega} = (\lambda, \mu, \nu)$  selon la formule :

$$\vec{\delta}_M = \vec{\delta}_{O_0} + \vec{\Omega} \wedge O_0 M \quad (\text{B.14})$$

On retrouve la formule de changement de point d'expression d'un moment.

Ainsi, dans les hypothèses de petits déplacements explicitées ci-dessus la position relative de deux repères est modélisée à l'aide d'un torseur de petits déplacements  $\{D(M)\}_{b_0}$  écrit au point  $M$  dans la base  $b_0$  de résultante, le vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  et de moment le vecteur translation  $\vec{\delta}$  (eqn. B.15) :

$$\{D(M)\}_{b_0} = \begin{matrix} M \\ \left( \begin{array}{c|c} \vec{\Omega} = & \begin{matrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{matrix} \\ \hline \vec{\delta}_M = & \begin{matrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{matrix} \end{array} \right)_{b_0} \end{matrix} \quad (\text{B.15})$$







## Résumé :

Face à la demande de plus en plus exigeante en terme de qualité et de coût de fabrication des produits manufacturés, la qualification et quantification optimal des défauts acceptables est primordial. Le tolérancement est le moyen de communication permettant de définir les variations géométriques autorisé entre les différents corps de métier intervenant au cours du cycle de fabrication du produit. Un tolérancement optimal est le juste compromis entre coût de fabrication et qualité du produit final.

Le tolérancement repose sur 3 problématiques majeures : la spécification (normalisation d'un langage complet et univoque), la synthèse et l'analyse de tolérances. Nous proposons dans ce document de nouvelles méthodes d'analyse et de synthèse du tolérancement tridimensionnel. Ces méthodes se basent sur une modélisation de la géométrie à l'aide de l'outil domaine jeux et écarts développé au laboratoire. La première étape consiste à déterminer les différentes topologies composant un mécanisme tridimensionnel. Pour chacune de ces topologies est définie une méthode de résolution des problématiques de tolérancement. Au pire des cas, les conditions de respect des exigences fonctionnelles se traduisent par des conditions d'existence et d'inclusions sur les domaines. Ces équations de domaines peuvent ensuite être traduites sous forme de système d'inéquations scalaires. L'analyse statistique s'appuie sur des tirages de type Monte-Carlo. Les variables aléatoires sont les composantes de petits déplacements des torseur écarts défini à l'intérieur de leur zone de tolérance (modélisée par un domaine écarts) et les dimensions géométriques fixant l'étendue des jeux (taille du domaine jeux associé). A l'issue des simulations statistiques, il est possible d'estimer le risque de non-qualité et les jeux résiduels en fonction du tolérancement défini.

Le développement d'une nouvelle représentation des domaines jeux et écarts plus adapté, permet de simplifier les calculs relatifs aux problématiques de tolérancement.

Le traitement local de chaque topologie élémentaire de mécanisme permet d'effectuer le traitement global des mécanismes tridimensionnels complexes avec prise en compte des jeux.

**Mots clés :** Tolérancement tridimensionnel des produits, Spécifications géométriques, Assemblage avec jeux et écarts, Torseur de petits déplacements, Méthodes des domaines jeux et écarts, Résolution au pire des cas, Simulation statistique, Tirage de Monte-Carlo.

## Abstract :

As far as the demand in quality and cost of manufacturing increase, the optimal qualification and quantification of acceptable defects is essential. Tolerancing is the means of communication between all actors of manufacturing. An optimal tolerancing is the right compromise between manufacturing cost and quality of the final product.

Tolerancing is based on three major issues : The specification (standardization of a complete and unequivocal language), synthesis and analysis of the tolerancing. We suggest in this thesis some new analysis and synthesis of the three-dimensional tolerancing. These methods are based on a geometric model define by the deviations and clearances domains developed on the laboratory. The first step consists in determining the elementary topology that composes a three-dimensional mechanism. For each kind of these topologies one resolution method is defined. In worst case, the condition of functional requirement respect is traduced by existence and inclusions conditions on the domains. Then these domains equations can be translated in inequalities system of scalar. The statistical analysis uses the Monte-Carlo simulation. The random variables are the small displacements components of the deviation torsor which is defined inside its tolerance area (model by a deviations domain) and the geometrics dimensions which set the extent of clearance (size of the clearance domain). Thanks to statistical simulation, it is possible to estimate the non-quality rate in regards to the defined tolerancing.

The development of a new representation of clearances and deviations domains most suitable, allows us to simplify the calculation for tolerancing problems.

The local treatment of elementary topology makes enables the global treatment of complex three-dimensional mechanisms with take into account of clearances.

**Key words :** Three-dimensional tolerancing, Geometric specifications, Assembly with clearance and deviations, Small displacements torsor, Deviations and clearances domains method, Resolution in worst case, Statistical simulation, Monte-Carlo method.